585

Proprietatea Bibliotecii
Universității Iași
III-8585

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

258/
1914.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I / 1914
258
1914

BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE"
No. V.

CULEGERE
DE
PROBLEME
DE
GEOMETRIE DESCRIPTIVA ȘI COSMOGRAFIE

INTOCMITĂ DE
TR. LALESCU și ST. N. MIREA

BUCUREȘTI
TIPOGRAFIA „COOPERATIVA". — Strada Belvedere, No. 6
1914

C 4906
BCU IAȘI/CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

BCU IAS/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

258
1914

CULEGERE DE PROBLEME

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE"
No. V.

CULEGERE
DE
PROBLEME
DE
GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ȘI COSMOGRAFIE

INTOCMITĂ DE
TR. LALESCU și ST. N. MIREA

649480
B.C.U. IASI

BUCUREȘTI
TIPOGRAFIA „COOPERATIVA", — Strada Belvedere, No. 6
1914
C. 4906

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

REÎNREGISTRAT
8 JUN. 1943
Bibliotecа Universităţii Iaşi
258|1914

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PREFAȚA

Rezultatul satisfăcător pe care l-au dat culegerile de probleme publicate până acum în biblioteca *Gazetei Matematice*, ne face să sperăm că și culegerea actuală de probleme, va conduce la un sfârșit tot așa de mulțumitor. Întocmită după aceleași principii, *Culegerea de Probleme de Geometrie Descriptivă și Cosmografie*, se adresează în special elevilor din secția reală a liceelor noastre din țară și cuprinde, într'o gradație treptată, probleme care îmbrățișează întregul program de liceu al acestor două materii.

Să ne fie îngăduit a da aci câteva indicațiuni pe care le socotim trebuincioase, asupra rezolvării problemelor din această culegere.

Chestiunile de Geometrie Descriptivă urmăresc în învățământ, desvoltarea intuiției spațiale și practica preciziunei geometrice prin desemn. De aceia problemele de Geometrie Descriptivă nu-și vor atinge scopul lor, decât atunci când vor fi lucrate pe planșetă, cu instrumentele de desemn în mână. O parte din probleme sunt întocmite cu date numerice spre a fi astfel lucrate; ele au fost verificate în Proseminarul Universitar de sub direcțiunea D-lui *E. Pangratti* și pot servi ca model pentru celelalte probleme.

Din fiecare capitol au fost alese câteva probleme tip, a căror epură a fost executată pentru a indica particularitățile grafice ale diferitelor metode.

De asemenea, Cosmografia fiind o știință de aplicație, se recomandă elevilor să conducă calculele până la sfârșit, fiindcă importanța problemelor de Cosmografie constă mai mult în rezultatele lor numerice.

Culegerea de probleme de Geometrie Descriptivă a fost întocmită de D-l *Tr. Lalescu*, iar culegerea de probleme de Cosmografie a fost alcătuită de D-l Ing. *St. N. Mirea*.

Chestiunile care pot fi lăsate la un prim studiu au fost prevăzute cu un asterisc.

August 1914. **Autorii.**

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

EXPLICAȚIUNI

Linia de pământ se reprezintă prin O X. Un punct din spațiu va fi reprezentat printr'o literă mare: A, B, C...; proecțiile punctului prin litere mici, cea verticală accentuată. De ex: (a, a'), (b, b') ....

Cele trei numere din paranteză sunt coordonatele punctului. Primul reprezintă distanța liniei de ordine $(a\ a')$ la o origină fixă O, aleasă cam la stânga cadrului; al doilea reprezintă *depărtarea*, iar al treilea *cota*. Semnele acestor coordonate sunt fixate de regula următoare: depărtarea este pozitivă dacă punctul se găsește în fața planului vertical, negativă în caz contrar, iar cota e pozitivă dacă punctul se află de-asupra planului orizontal, negativă în caz contrar; prima coordonată e pozitivă la dreapta punctului O, negativă la stânga. Datele numerice sunt exprimate în milimetri, afară de indicații contrare. Un punct având coordonate nedeterminate se va reprezenta prin $(x\,y\,z)$ $(x'y'z')$ spre a evita o confuziune cu literele proecțiunilor $(a\,a')$ $(b\,b')$.

O dreaptă se reprezintă în spațiu prin două din punctele sale, de exemplu, dreptele A B, B C, . ., iar proecțiunile sale, prin proecțiunile acestor puncte; d. ex: $(a\,b,\ a'b')$, $(b\,c,\ b'c')$ ....

Vom reprezenta uneori în mod general, o dreaptă printr'o singură literă; așa vom scrie dreptele D, D_1, ...

Urma orizontală se va însemna prin H $(h\,h')$, iar cea verticală prin V $(v\,v')$.

Planul se reprezintă prin urmele sale din primul diedru; punctul de întâlnire al urmelor va fi notat cu α, β, γ, etc.; urmele, cu aceiași literă mare, cea verticală accentuată. Exemplu: P α P', Q β Q'.

Fie α, α' și α'' punctele unde un plan întâlnește linia de pământ, dreapta perpendiculară pe planul vertical dusă din origina O și verticala originei O. Aceste trei axe sunt rectangulare între ele, două câte două; distanțele $O\alpha$, $O\alpha'$ $O\alpha''$ se numesc *coordonatele la origină* ale planului. Vom caracteriza un plan prin aceste trei lungimi ast-fel: $(O\alpha, O\alpha', O\alpha'')$.

Prescurtarea *G. M.* înseamnă: *Gazeta Matematică*.

GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

I. PUNCTUL

1. Să se facă alfabetul punctului, adică epura punctului când acesta se găseşte în diferitele poziţii remarcabile faţă de planele de proecţiune şi de cele două plane bisectoare.

2. Să se construiască punctele: 1° A(18, 20, — 14), B(18, — 14, 20) In ce diedre se găsesc şi ce particularităţi prezintă? 2° Aceiaşi chestiune pentru punctele: A(15, — 6, 14), B(15, — 6, —14); 3° Aceiaşi chestiune pentru punctele: A(0, 5, —4), B(0, 4, —5).

3. Fie punctul A(x, y, z). Să se determine coordonatele simetricului său: 1° în raport cu planele de proecţiune; 2° în raport cu planele bisectoare.

4. Se dă proecţiunea orizontală a a unui punct şi distanţa sa l de linia OX. Să se determine proecţiunea verticală a punctului.

5. Să se reprezinte proecţiunile unui punct situat în diedrul format de planul vertical şi primul bisector, dar mai aproape de planul vertical.

DREAPTA

II. EPURA LINIEI DREPTE; DREPTE PARTICULARE

1. Să se construiască dreptele determinate de punctele:

1° A(20, 16, 3), B(52, —14, 17);
2° A(0, 14, 12), B(16, — 11, 4);
3° A(0, — 40, 14), B(30, — 15, — 8);
4° A(4, 48, 10), B(31, 11, — 10);

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

5° A (10, 5, 10), B (40, 20, 10);
6° A (9, 9, — 9), B (35, 0, — 9);
7° A (15, 12, 7), B (45, 12, 55);
8° A (20, 0, 13), B (40. 0, 19);
9° A (8, — 8, — 8), B (42, 12, 12);
10° A (15. 14, z), B (15, 14, z');
11° A (20, 0, 14), B (20, y, 14);
12° A (0, 0, 0), B (25, 14, 14);
13° A (11, 0, 0), B (36, 20, 20);
14° A (10, 0, 0), B (18, 0, 0);
15° A (18, 14, 18), B (30, 14, 18).

Să se determine în fiecare din aceste cazuri, urmele dreptelor; să se indice particularităţile lor. Se vor puncta părţile cari nu sunt cuprinse în diedrul întâi.

2. Să se determine pe o dreaptă dată, punctul care are cota egală cu depărtarea. Aplicaţie la dreapta 1,3°; în ce diedru se găsesc punctele astfel determinate?

3. Pe o dreaptă dată A B, să se determine punctul a cărui cotă este de 5,2 ori mai mică ca depărtarea; să se generalizeze. Aplicaţie la dreapta 1,4°.

4. Să se determine pe o dreaptă dată, punctele pentru care suma cotei şi a depărtării e egală cu o lungime dată l. Aplicaţie pentru $l = 14$ la dreapta 1, 1°.

5. Să se arate că dacă o dreaptă este egal înclinată pe ambele plane de proecţie, urmele sale sunt egal depărtate de OX şi reciproc.

6. Să se arate că toate dreptele care trec printr'un punct fix A şi au urmele orizontale la aceiaşi distanţă de linia de pământ, vor avea şi urmele lor verticale egal depărtate de linia de pământ, să se stabilească relaţia $\frac{m\,a}{h\,h'} + \frac{m\,a'}{v\,v'} = 1$, m fiind punctul de pe OX al liniei de ordine $a\,a'$ în toate cazurile de figură.

7. O dreaptă este astfel încât figura hh', vv' e un dreptunghiu. Să se arate că segmentul H V e situat în diedrul al 2-lea sau al 4-lea şi că este împărţit în două părţi egale de al doilea bisector.

8. Să se arate că orice dreaptă la care segmentul H V e îm-

părțit de primul bisector în două părți egale, are proiecțiile sale paralele. Să se demonstreze apoi că aceste drepte sunt paralele cu al doilea bisector.

9. Să se arate că segmentul de pe o orizontală, cuprins între cele două plane bisectoare e împărțit în două părți egale de urma orizontalei.

10. Să se construiască o verticală cunoscând segmentul său BC cuprins între cele două plane bisectoare.

III. DREPTE CONCURENTE, PARALELE, PERPENDICULARE

1. Să se studieze poziția relativă a dreptelor AB și CD în cazurile următoare:

1° A(6, 15, 0), B(36, 0, 19); C(30, 3, 10), D(16, 10, 21);

2° A(8, 11, 4), B(41, 0, — 20); C(29, 1, 5), D(29, 4, 10);

3° A(5, 18, 0), B(32, 8, 17); C(5, 10, 11), D(30, 18, — 10).

2. Se consideră dreapta AB, (1, 1°) și punctul C (30, 12, 10). Prin C să se ducă o dreaptă care să întâlnească pe AB și care să fie: 1° Orizontală, 2° Frontală.

3. Prin punctul C să se ducă o dreaptă paralelă cu primul bisector, care să întâlnească o dreaptă dată AB. Aplicație: C(30, 12, 10), A (6, 8, 0), B(36, 21, 24).

4. Se dau punctele A(0, 0, 11), B(15, 8, 11), C (15, 20, 20). Să se ducă prin C: 1° o paralelă cu AB; 2° o perpendiculară pe AB; 3° o frontală care să o întâlnească. 4° Fie D(30, 11, z); să se determine z, astfel ca dreptele AB și CD să fie concurente.

5. Se dă proecția verticală $a'b'$ a unei drepte și se consideră dreptele ce trec printr'un punct fix C și întâlnesc linia de pământ. Să se arate că punctele acestor drepte, care au proecțiile verticale pe $a'b'$ sunt situate pe aceiași linie dreaptă.

6. Printr'un punct C, să se ducă o dreaptă care să întâlnească linia de pământ și o dreaptă dată AB. Aplicație: A (5, 18, 0), B(32, 8, 17) și C (15, 20, 35).

7. Printr'un punct A, să se ducă o dreaptă care să întâlnească o altă dreaptă BC, în punctul unde aceasta înțeapă primul plan bisector.

8. Se consideră două drepte concurente AB și CD, prima o

frontală iar a doua situată în primul bisector. Cunoscând proecţiile verticale ale acestor drepte, să se determine proecţiunile orizontale.

9. Să se determine verticala care întâlneşte două drepte date.

10. Două drepte sunt astfel încât proecţiunea orizontală a uneia, este identică cu acea verticală a celeilalte şi viceversa. Să se arate că aceste drepte sunt concurente într'un punct situat în al doilea bisector.

11. Printr'un punct C, să se ducă o dreaptă care să întâlnească o alta A B, în cazurile următoare: 1° dreapta A B e verticală; 2° dreapta A B e situată în al doilea bisector.

12. Să se ducă o orizontală care să determine între două frontale date A B şi C D, un segment de o lungime cunoscută *l*. Aplicaţie *l*=25, A (0, 15, 0), B (28, 15, 22), C (28, 30, 22), D (40, 30,0).

13. In ce caz, două frontale pot fi concurente?

14. Să se recunoască cu ajutorul teoremelor dela dreptele paralele, că o dreaptă care are proecţiunile sale paralele, este paralelă cu al doilea bisector.

15. Să se înscrie între două orizontale date, un segment astfel ca mijlocul său să se găsească pe o dreaptă dată Δ.

16. Aceiaşi problemă, segmentul să fie împărţit într'un raport dat.

17. Perpendiculara comună unei frontale şi unei orizontale.

19. Să se demonstreze că perpendiculara comună a două drepte care au proecţiunile lor verticale paralele, e o frontală. Să se deducă de aci un mijloc simplu pentru a construi perpendiculara comună în acest caz.

20. Orizontalele care întâlnesc o verticală şi o frontală date, au urmele lor pe aceiaşi linie dreaptă.

21. Să se demonstreze ca dreptele care unesc vârfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale feţelor opuse, se întâlnesc într'un acelaş punct.

22. Să se demonstreze că dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale unui tetraedru, se întâlnesc într'un acelaş punct.

23. Să se indice un mijloc pentru a recunoaşte dacă două drepte sunt concurente, în cazul când proecţiunile lor de acelaş nume, nu se întâlnesc în cadrul epurii.

24. Se dă proecţiunea orizontală a unui poligon şi proecţiile verticale a trei din vârfurile sale. Să se determine întreaga proecţiune verticală a poligonului.

25. Pentru ca un romb să se proecteze după un romb, trebue și e de ajuns ca una din diagonalele sale, să fie paralelă cu planul de proecțiune.

PLANUL

IV. URMELE PLANULUI; PLANURI PARTICULARE.

1. Să se determine natura planelor:

1° (18, 11, −14), 2° (0, −15, 15), 3° (14, −18, 0),
4° (15, 0, 17), 5° (11, 0, 0), 6° (13, 5, ∞),
7° (∞, 3, 2). 8° (4, ∞, ∞), 9° (12, ∞, −3),
10° (∞, 4, ∞).

2. Să se determine urmele unui plan dat prin trei puncte, în cazurile următoare:

1° A(7, 11, 3), B(22, 0, 28), C(35, 10, 12),
2° A(14, 11, 3), B(25, 0, 18), C(18, 0, 0),
3° A(10, 10, 10), B(30, 15, 18), C(40, 11, 16).

3. Să se determine urmele unui plan dat printr'un punct C și o dreaptă AB în cazurile următoare:

1° Punctul este pe OX iar dreapta de profil (a se rezolva fără ajutorul rabaterei).

2° Punctul și dreapta oarecare, dar urmele dreptei nu sunt în cadrul epurii.

3° Punctul oarecare iar dreapta verticală.

4. Să se cerceteze dacă punctele A(11, 10, 14), B(33, 15, 28), C(19, 16, 25), D(40, 5, 25) sunt în acelaș plan. Să se determine cota z a punctului D astfel ca aceste puncte să fie în acelaș plan.

5. Să se determine față de planul 2, 1°, proecția verticală a unui punct, cunoscînd proecția sa orizontală și știind că planul împarte cota acestui punct în două părți egale.

6. Să se determine urmele unui plan dat prin două drepte care se întâlnesc pe linia de pământ.

7. Se dau două plane ale căror urme orizontale sunt paralele și un punct A de pe intersecția lor; să se determine urmele verticale ale planelor.

8. Ce particularitate prezintă un plan când urmele sale se confundă?

9. Ce particularitate prezintă un plan determinat de două drepte, dacă proecţiunile de nume diferit ale acestor drepte coincid? Să se determine urmele acestui plan.

10. Să se construiască un plan cunoscând direcţia unei linii de cea mai mare pantă şi punctul unde planul întâlneşte O X.

11. In planul 2, 1°, să se construiască linia de cea mai mare pantă care trece prin A.

12. In planul 2, 2°, să se ducă o frontală situată la o distanţă $l = 25$ de planul vertical.

13. Ce particularitate prezintă un plan când urmele sale sunt simetrice în raport cu O X?

14. Să se demonstreze că dreptele situate într'un plan şi având urmele lor egal depărtate de O X, sunt paralele între ele.

15. Să se construiască un plan cunoscând urma sa verticală şi ştiind că liniile sale de cea mai mare pantă au urmele lor egal depărtate de O X.

16. Fie φ unghiul pe care-l face urma verticală a unui plan cu O X. Să se arate că dacă $tg\,\varphi = \frac{1}{2}$ şi dacă urma orizontală face un unghiu de 45° cu O X, liniile de cea mai mare pantă sunt paralele cu unul din planele bisectoare.

17. Să se verifice printr'o demonstraţie directă că o frontală şi o orizontală a unui plan, sunt concurente.

18. Să se determine urmele unui plan definit printr'o dreaptă oarecare şi un punct din planul vertical.

19. Fiind dată o dreaptă A B prin urmele sale, să se determine un punct M din planul orizontal şi de depărtare dată, aşa fel ca planul A B M să fie perpendicular pe primul bisector.

20. In planul 2, 3°, să se determine punctul având cota 23, iar depărtarea 20.

21. Ce condiţiuni trebue să îndeplinească o dreaptă pentru ca să fie paralela cu planul determinat de O X şi un punct oarecare A?

22. Să se ducă o orizontală de lungime dată şi sprijinindu-se pe două drepte oarecare, nesituate în acelaş plan.

23. Se consideră planul 2, 1° şi punctul M (10, 6, z) situat în acest plan. Să se determine z fără ajutorul urmelor planului.

24. Să se ducă printr'o dreaptă dată A B un plan care să

tae un alt plan $P \alpha P'$ după o dreaptă al cărei segment H V să fie împărțit de dreapta A B în 2 părți egale.

25. Printr'un punct A să se ducă un plan care să taie un alt plan $P \alpha P'$ după o linie de cea mai mare pantă a acestuia, a cărei segment H V să aibă în proecție orizontală o lungime dată *l*.

DREAPTA ȘI PLAN

V. DREPTE SI PLANE PERPENDICULARE

1. Prin punctul A (11, 9, 25) să se ducă un plan perpendicular pe dreapta determinată de punctele B (20, 10, 5), C (40, 28, 25).

2. Se dau două plane paralele cu O X, unul ale cărui urme sunt confundate, celălalt având urmele echidistante de O X. Să se arate că aceste plane sunt perpendiculare.

3. Printr'un punct ale cărui proecții coincid, să se ducă o dreaptă perpendiculară pe un plan ale cărui urme iarăși coincid. Ce particularitate prezintă această dreaptă ?

4. Printr'un punct M să se ducă o perpendiculară pe un plan definit printr'o frontală și o linie de cea mai mare pantă.

5. Să se arate că un plan ale cărui urme sunt confundate, este perpendicular pe al doilea bisector.

6. Să se construiască un romb cunoscînd una din diagonale A C și știind că vârful B se găsește pe linia de pământ. *Aplicație* : A (0, 12, 13). C (32, 25, 28).

7. Două orizontale rectangulare au proecțiile lor orizontale rectangulare.

8. Dacă avem două plane perpendiculare între ele, iar unul din ele perpendicular pe un plan de proecție, atunci urmele lor pe acel plan sunt rectangulare.

9. Prin dreapta A B, A (0, 0, 20), B (15, 12, 0) să se ducă un plan perpendicular pe primul bisector.

10. Prin linia de pământ să se ducă un plan perpendicular pe un plan dat.

11. Printr'o dreaptă dată, să se ducă planul perpendicular pe un plan dat printr'o frontală și o orizontală.

12. Dintr'un punct dat, să se scoboare o perpendiculară pe un plan dat prin două drepte, fără a întrebuința urmele planului.

13. Să se ducă o orizontală perpendiculară pe o dreaptă AB și care să întâlnească o alta D din planul vertical

14. Cum trebue să fie o dreaptă A B pentru ca să putem duce prin O X un plan perpendicular pe acea dreaptă?

15. Un triunghiu A B C are o latură A B orizontală, iar vârful opus pe O X. Să se construiască triunghiul, cunoscând poziția laturei A B și diferența $AC^2 - BC^2 = K^2$.

VI. DREPTE SI PLANE PARALELE

1. Prin punctele A (10, 18, —15), B (11, 7, 12) să se ducă un plan paralel cu O X.

2. Prin punctul A (10, 10, 15) să se ducă un plan paralel cu: 1° primul bisector; 2° al doilea bisector; 3° planul orizontal; 4° planul (18, 10, 15).

3. Să se recunoască dacă planul $P \alpha P'$ și dreapta B C sunt sau nu paralele în cazurile următoare: 1° $P \alpha P'$ (18, 24, 30), B (6, 40, 0), C (40, 1, 35); 2° $P \alpha P'$ (—16, 18, 10), B (0. 32, 0), C (21, 0, 32).

4. Se consideră dreptele care au planele proectante verticale paralele și întâlnesc două frontale date. Să se arate că proecțiunile lor orizontale trec toate printr'un punct fix.

5. Printr'un punct M să se ducă un plan egal depărtat de vârfurile unui triunghiu A B C.

6. Prin trei puncte A, B, C să se ducă trei plane echidistante, așa ca distanța dintre ele să fie maximă.

7. Să se ducă trei plane paralele echidistante, două trecând respectiv prin punctele A și B, iar celălalt printr'o dreaptă dată M N.

8. Printr'o dreaptă dată, să se ducă un plan egal depărtat de punctele A și B.

9. Printr'un punct A, să se ducă un plan paralel cu planul determinat de O X și un punct dat B. Aplicație: A (0, 11, 14), B (10, 8, 5). (fără rabatere).

10. Fie $P \alpha P'$ un plan dat, A B o dreaptă paralelă cu acest plan. Se cunoaște punctul A și proecția verticală a punctului B; să se determine proecția orizontală a punctului B. Aplicație: $P \alpha P'$ (—15, 10, 12), A (—5, 19, 11), B (25, y, 5).

VII. DREAPTA SI PLANUL DE PROFIL

1. Care este condițiunea ca trei puncte A, B, C situate într'un plan de profil, să fie în linie dreaptă?

2. Să se determine punctele de intersecție ale unei drepte de profil cu planele bisectoare.

3. Se dau dreapta de profil A B și dreapta C D: A(0,11, −12), B(0, 25, 15); C(11. 9, 10) și D(30, −10, z). Să se determine z astfel ca dreptele A B și C D să fie concurente (prin rabatere).

4. Să se determine urmele unui plan dat prin două drepte, dintre care una de profil.

5. Cum se poate recunoaște dacă două drepte de profil sunt paralele, fără ajutorul rabaterii?

6. Prin punctul A să se ducă o dreaptă care să întâlnească axa O X și o dreaptă de profil B C dată. Aplicație: A(0, 11, 15), B (18, 11, 10), C (18, −3, 14).

7. Să se găsească condițiunea ca două plane paralele cu O X să fie paralele între ele.

8. Printr'o dreaptă dată, să se ducă un plan perpendicular pe un plan de profil.

9. Prin punctul A(0, 20, 15) să se ducă o dreaptă de profil astfel ca raportul dintre cota urmei sale verticale și depărtarea urmei sale orizontale să fie egal cu 3 : 5.

10. Prin punctul A (0, 20, 15) să se ducă o dreaptă de profil, H V, astfel ca A H : A V = 5 : 4.

11. Să se găsească perpendiculara comună a două drepte de profil.

12. Intr'un plan paralel cu O X și dat prin urmele sale, să se ducă o dreaptă paralelă cu O X cunoscând raportul dintre distanțele proecțiunilor sale la O X.

13. Se dă un plan paralel cu O X și proecția orizontală a unui punct A situat în acest plan. Să se determine, prin rabatere, proecția verticală a punctului A. Aplicație: planul (∞, 10, 8), A(10. 5, z).

14. Să se ducă o dreaptă de profil, paralelă cu al doilea bisector și care să întâlnească alte două drepte date. Aplicație: dreptele A B și C D: A(0, 4. 1). B(38, 17, 20 . C(38, 0. 8), D (0, 13, 0).

15. Dintr'un punct A, să se scoboare o perpendiculară pe dreapta de profil B C.

CELE TREI METODE

VIII. SCHIMBAREA DE PLANE

1. Să se înlocuiască planul vertical cu un plan de profil, astfel ca în noul sistem, depărtarea unui punct dat A să fie egală cu o lungime dată *l*.

BCU IAȘI CENTRU UNIVERSITY LIBRARY

2. Să se facă o schimbare de plan vertical astfel în cât proecţiunea verticală a unui punct dat A, să vină într'un punct m'.

3. Să se aducă un punct dat A în primul bisector printr'o schimbare de plan vertical.

4. Să se aducă o dreaptă dată A B în primul bisector printr'o schimbare de plan vertical. Aplicaţie A(10, 15, 0), B(35, 0, 20).

5. Să se facă o schimbare de plan vertical astfel în cât un segment A B să aibă ca proecţiune verticală o lungime dată l. Aplicaţie: A(5, 7, 13), B(27, 15, 25), $l=16$.

6. Să se facă o schimbare de plan vertical astfel ca o dreaptă dată să facă unghiuri egale cu ambele plane de proecţiune.

7. Fiind date două drepte ale căror proecţiuni de acelaş nume sunt concurente, să se efectueze o schimbare de plan vertical, astfel ca noile proecţiuni verticale să fie paralele.

8. Să se găsească cea mai scurtă distanţă între două drepte A B şi C D printr'o singură schimbare de plan vertical; să se determine apoi poziţia perpendicularei comune.

9. Perpendiculara comună între O X şi o dreaptă oarecare.

10. Perpendiculara comună între două drepte de profil.

11. Perpendiculara comună între o frontală şi o orizontală.

12. Să se facă o schimbare de plan astfel ca urmele unui plan dat, să se confunde după schimbare. Aplicaţie: P α P' (—10, 8, 5).

13. Un plan e învârtit în jurul urmei sale orizontale şi în sensul pozitiv, de un unghiu α. Să se determine noua urmă verticală printr'o schimbare de plan vertical.

14. Se dă o orizontală A B a unui plan P şi un punct de pe urma sa orizontală. Să se determine unghiul planului P cu planul orizontal, printr'o schimbare de plan vertical.

15. Să se determine unghiul pe care-l face planul determinat de două drepte A B şi A C cu planul orizontal, printr'o schimbare de plan vertical. Aplicaţie A(30, 13, 13), B(45, 25, 7), C(0, 20, 0).

16. Să se afle distanţa punctului M(0, 25, 29) la planul P α P'(—20, 18, 10) printr'o schimbare de plan vertical.

17. Să se afle distanţa de la un punct la un plan dat prin două drepte, cu ajutorul unei schimbări de plan vertical şi fără a determina urmele planului.

18. Să se găsească distanţa de la punctul M(14, 16, 22) la dreapta A B, A(0, 16, 0), B(35, 0, 20), printr'o schimbare de plan vertical.

19. Se dau două plane paralele; să se afle distanța dintre aceste plane, printr'o schimbare de plan vertical.

20. Fiind date două plane prin urmele lor, să se facă o schimbare de plan vertical, așa ca noile urme verticale ale celor două plane să fie paralele.

IX. ROTAȚIA

1. Să se rotească un punct A în jurul unei axe verticale date până ce vine: 1° în planul vertical, 2° într'un plan oarecare P.

2. Se dă proecția verticală m' a unui punct, o dreaptă AB și o axă verticală O. Să se determine m astfel ca M, printr'o rotație convenabilă în jurul axei, să poată veni pe AB.

3. Să se determine un punct situat la o distanță l de o axă verticală O, așa ca rotit în jurul acestei axe, în sensul positiv, de unghiurile α și β, să vină într'un acelaș plan dat P.

4. Să se determine axa verticală în jurul căreia trebue rotit un punct dat M pentru ca, după o rotație de 90°, să vină pe verticala unui punct dat P.

5. Să se rotească un punct în jurul unei frontale până ce vine în primul bisector.

6. Se dă un punct M pe linia de pământ și o axă oarecare. Să se determine poziția punctului M după o rotație de 90°, în jurul axei.

7. Să se rotească un segment AB în jurul unei axe verticale așa ca: 1° să fie împărțit de un plan dat P în două părți egale sau într'un raport dat; 2° să devină paralel cu un plan dat, 3° să aibă noile sale proecțiuni paralele.

8. Să se rotească o dreaptă în jurul unei axe verticale care o întâlnește așa ca noile sale proecții să fie rectangulare.

9. Se dau două puncte A, B și o axă verticală. Să se rotească B în jurul axei până ce vine în planul determinat de axă și A.

10. Să se rotească o dreaptă dată în jurul unei axe verticale care o întâlnește până ce face unghiuri egale cu planele de proecțiune.

11. Să se rotească o dreaptă în jurul unei axe orizontale astfel ca proecțiunea verticală a dreptei să-și păstreze direcțiunea.

12. Se dă un punct A și un segment BC. Să se rotească BC în jurul unei axe O, așa ca punctele B și C să devină egal depărtate de A.

13. Să se rotească două drepte A B şi C D în jurul unei axe verticale aşa ca cea mai scurtă distanţă a lor, să se proecteze în adevărată mărime pe planul vertical.

14. Să se afle cea mai scurtă distanţă dintre două drepte printr'o singură rotaţie.

15. Se dau două drepte nesituate în acelaş plan. In jurul cărei axe verticale trebue rotită una din ele pentru ca să coincidă cu cealaltă ?

16. Se dau trei puncte A, B şi C. In jurul cărei axe verticale se pot roti pentru ca după rotaţiuni convenabile, punctele să vină pe aceiaşi verticală ?

17. Să se rotească un plan în jurul unei axe verticale, având urma sa pe urma orizontală a planului.

18. Să se rotească un plan în jurul unei axe verticale până ce : 1° urma sa verticală trece printr'un punct dat m'; 2° planul devine paralel cu o dreaptă dată.

19. Să se rotească un plan în jurul unei axe verticale, aşa ca urmele sale să se confunde.

20. Să se rotească un plan în jurul axei O X până ce devine vertical. Să se determine unghiul de rotaţie.

X. RABATEREA

1. Se dă urma orizontală α P a unui plan rabatut pe planul orizontal şi rabaterea A_1 a unui punct A din acest plan şi primul bisector. Să se determine urma verticală a planului.

2. Să se determine urma verticală a unui plan P α P', cunoscând urma sa orizontală şi rabaterile A_1 şi B_1 a două puncte situate pe o frontală a acestui plan.

3. Se dă unghiul pe care-l face în spaţiu, urmele unui plan precum şi rabaterile A_1 şi B_1 a două puncte situate pe câte una din aceste urme ; să se determine planul.

4. Se dă urmă verticală a unui plan, rabaterea A_1 pe planul orizontal a unui punct A din acest plan şi cota acestui punct. Să se determine urma orizontală.

5. Să se determine urmele unui plan cunoscând proecţia orizontală a unui punct din acest plan, cota şi rabaterea sa A_1.

6. Să se înscrie între urmele unui plan P α P', un segment H V de mărime dată l, astfel ca suprafaţa triunghiului H V α să fie : 1° egală cu o cantitate dată k^2, 2° maximă.

7. Să se construiască punctele remarcabile ale unui triunghiu dat prin vârfurile sale.

8. Să se construiască un triunghiu echilateral cunoscând două din vârfurile sale, A și B egal depărtate de planul orizontal și știind că al treilea vârf se găsește în planul orizontal.

9. Se dă un plan prin urma sa orizontală și printr'un punct M care e centrul unui pătrat de latură dată, situat în acest plan. Știind că una din diagonale este o linie de pantă a planului, să se determine proecțiunile pătratului.

10. Să se construiască proecțiunile unui exagon situat într'un plan care trece prin O X, cunoscând centrul și proecția orizontală a unuia din vârfuri.

11. Să se înscrie între urmele unui plan dat un segment al cărui mijloc să fie : 1° într'un punct dat A, 2° pe o dreaptă dată A B iar segmentul să fie paralel cu o direcție dată din acel plan.

12. Să se determine într'un plan dat prin urmele sale, un punct cunoscând distanțele acestui punct la urmele planului.

13. Să se înscrie între urmele unui plan dat P α P', un segment de mărime *l* care să fie egal depărtat de α și de un punct dat A din acel plan.

14. O dreaptă dată întâlnește O X; să se ducă prin această dreaptă un plan ale cărui urme să facă unghiuri egale cu dreapta dată.

15. Printr'un punct dat A, să se ducă un plan astfel ca unghiul urmelor sale să fie egal cu un unghiu dat.

16. Se dă urma orizontală α P a unui plan. Să se determine urma verticală astfel ca după rabatere pe planul orizontal, rabaterea sa să se confunde cu însăși urma verticală.

17. Să se determine urmele unui plan P α P' știind că $\sphericalangle$P α P' este drept, iar dreptele reprezentate de aceste urme fac între ele un unghiu dat.

18. Să se determine mediana cea mai mică a unui triunghiu dat prin vârfurile sale.

19. Să se construiască un triunghiu echilateral cunoscând două vârfuri A, B și știind că al treilea C, se găsește într'un plan dat P.

20. Să se determine într'un plan dat P, un punct situat la o distanță *l* de un punct A al planului și la o distanță *l'* de un alt punct B de asemenea dar nesituat în planul P.

APLICAȚIUNI

XI. INTERSECȚII

Să se găsească intersecția a două plane în cazurile următoare:

1. Un plan perpendicular pe primul bisector cu un plan de profil. Aplicație: P(10, —12, —12), Q(52, ∞, ∞).

2. Un plan dat prin două drepte AB și BC cu un plan de profil P. Aplicație: A(0, 4, 3), B(20, 15, 18), C(32, 6, 4), P(12, ∞, ∞).

3. Două plane ale căror urme se întâlnesc toate în același punct pe OX. Aplicație: P ∝ P'(10, —8, —6), Q ∝ Q'(10, 11, —5).

4. Un plan dat prin două drepte AB și BC cu altul dat prin urmele sale. Aplicație: A(0, —5, 6), B(15, —21, —18), C(30, —2, 5), P(—10, 5, 8).

5. Un plan dat prin urmele sale cu un plan determinat de OX și un punct A. Aplicație: P ∝ P'(—15, 10, 7), A(10, 12, 18).

6. Un plan dat prin două drepte AB și BC cu un plan paralel la OX. Aplicație: A(0, 4, 3), B(20, 15, 18), C(32, 6, 4), P ∝ P'(∞, 10, 5).

7. Două plane date prin linii de pantă AB și CD Aplicație: A(20, 18, 0), B(40, 0, 5); C(10, 0, 12), D(43, 12, 0).

8. Două plane având fiecare urmele confundate. Aplicație: P ∝ P'(20, 15, —15), Q ∝ Q'(10, —10, 10).

9. Primul bisector cu un plan P ∝ P' frontal sau oarecare. Aplicație: 1° P ∝ P'(∞, 8, ∞), 2° P ∝ P'(10, —8, —5).

10. Un plan paralel cu OX și un plan care trece prin OX și un punct A. Aplicație: P ∝ P'(∞, 12, 5), A(10, 15, 18).

11. Se dă planul de profil P ∝ P'(10, ∞, ∞) și planul determinat de punctele A(0, 5, 4), B(18, 14, 16), C(30, 10, z). Să se determine z astfel ca dreapta de intersecție să întâlnească OX.

12. Să se ducă prin punctul de întâlnire al unei drepte D cu un plan P, o dreaptă perpendiculară pe D și situată în P.

13. Să se determine centrul sferei circumscrise unui tetraedru ABCD. Aplicație: A(10, 5, 4), B(25, 25, 4), C(36, 3, 4), D(22, 10, 24).

14. Dintr'un punct M, să se ducă un plan perpendicular pe planele P și Q.

15. Printr'un punct M, să se ducă o dreaptă ortogonală unei drepte D și paralelă cu un plan dat.

16. Se dau proecțiunile orizontale a două drepte AB și CD

BCU Cluj / UNIVERSITY LIBRARY

precum și proecțiile perpendicularei comune M N ; să se determine proecțiunile verticale.

17. Printr'un punct M al unui plan P, să se ducă o dreaptă situată în P, cunoscând distanța sa d la o verticală dată O.

18. Să se determine o dreaptă care să întâlnească trei drepte nesituate în același plan.

19. Printr'un punct M, să se ducă o dreaptă care să întâlnească două drepte date.

20. Printr'un punct M, să se ducă o dreaptă paralelă cu un plan P și care să întâlnească o dreaptă D.

21. Să se determine pe o dreaptă D, un punct egal depărtat de două puncte A și B.

22. Să se construiască un triunghiu isoscel cunoscând poziția bazei A B, lungimea laturilor egale și știind că vârful C se găsește într'un plan dat.

23. Să se găsească într'un plan, punctul egal depărtat de trei puncte A, B, C ne situate în acel plan.

24. Fiind date două segmente egale A B și C D, să se găsească o axă astfel ca printr'o rotație împrejurul acestei axe, segmentele date să coincidă.

25. Să să se determine intersecția a două plane, cunoscând urmele orizontale și unghiurile lor de înclinare pe planul orizontal.

XII. DISTANȚE

1. Să se determine distanța A B în cazurile următoare : 1° A(0, 28, 5), B(22,10, 11). 2° A(0, 0, 0), B(32,14,20). 3° A(14,0,18), B(14, 20, 0). 4° A(0, 15, 16), B(15,—10. 20.

2. Să se determine distanța punctului A (0, 18, 15) la planele PαP' în cazurile următoare : 1° PαP'(∞, 4, 15), 2° P α P'(—19, 12, 12), 3° (5, 6, ∞).

3. Să se determine distanța punctului C(16, 15, 20) la dreapta A B în cazurile următoare : 1° A 0, 0, 0), B(11, 0, 0); 2° B(10, 8, 10), B(25, 8, 20).

4. Se dă o dreaptă A B și un punct C. Să se determine pe dreaptă un punct M astfel ca C M = l.

5. Se dă o dreaptă ale cărei urme sunt egal depărtate de O X; să se determine distanța sa la planul bisector cu care e paralelă.

6. Să se determine pe o dreaptă dată H V un punct a cărei distanţă la un plan P să fie egală cu l. Aplicaţie: P (10, 3, 5), H (2, 27, 0), V (40, 0, 22), $l = 6$.

7. Într'un plan dat să se ducă o dreaptă paralelă cu al doilea bisector şi astfel ca segmentul H V al acestei drepte să aibă o lungime dată.

8. Se dă urma orizontală a unui plan, un punct din spaţiu şi distanţa l a planului la acel punct. Să se determine urma verticală.

9. Să se ducă printr'un punct dat A o dreaptă ale cărei urme să fie egal depărtate de O X şi astfel ca $HV = l$.

10. Să se determine un punct A cunoscând cota, depărtarea şi distanţa sa l la un punct dat B.

11. Să se determine o dreaptă paralelă cu o direcţie dată, cunoscând distanţele sale la o verticală şi o dreaptă oarecare.

12. Să se determine o dreaptă care trece printr'un punct dat A, cunoscând distanţa sa la O X şi piciorul α de pe O X al perpendicularei comune între dreaptă şi O X.

13. Să se ducă printr'un punct A o dreaptă H V astfel ca V să se găsească pe o dreaptă dată din planul vertical şi aşa ca să avem $AV = m\,AH$.

14. Se dau două puncte A B, o dreaptă D şi se cere a se găsi drumul minimum dintre cele două puncte care întâlneşte dreapta dată.

15. Se dă proecţia orizontală ab a unui segment, în mărime şi poziţie, proecţia verticală b' şi lungimea $AB = l$: să se determine proecţia verticală a segmentului.

16. Printr'un punct A al unui plan $P \alpha P'$, să se ducă în acest plan o dreaptă situată la o distanţă l de un punct B exterior planului.

17. Să se ducă în planul vertical o dreaptă care să fie la distanţele l şi l' de două puncte date A şi B.

18. Printr'un punct A din planul orizontal, să se ducă o dreaptă cuprinsă în acest plan şi egal depărtată de două puncte din spaţiu B şi C.

19. Să se înscrie între planele de proiecţiune un segment paralel cu o direcţie dată, care să întâlnească o dreaptă dată şi al cărui mijloc să se găsească într'un plan dat P.

20. Să se determine într'un plan $P \alpha P'$, o dreaptă cunoscând distanţele sale la două verticale date.

21. Să se ducă un plan paralel cu un plan dat, astfel ca cele două plane să determine pe o dreaptă dată, o lungime l.

22. Să se determine un punct cunoscându-se distanțele sale la planele de proecțiune și la un plan dat.

23. Să se determine centrul unei sfere de rază r tangentă la planul orizontal și trecând prin două puncte date A și B.

24. Să se determine centrul unei sfere de rază r tangentă la trei plane date.

25. Se dă urma orizontală a unui plan perpendicular pe planul vertical, și distanța sa la un punct dat A. Să se determine urma verticală a planului.

XIII. UNGHIURI.

1. Să se afle unghiurile dreptei A B, (0, 15, 0), B (28, 3, 15) cu ambele plane de proecție.

2. Să se determine unghiul dreptelor A B și B C în cazurile următoare:

1° A(0, 18, 0), B(20, 25, 30), C(40, 10, 0);
2° A(0, 5, 0), B(25, 18, 16), C(45, 0, 16);
3° A(0, 8, 7), B(15, 8, 7), C(30, 14, 25);
4° A(0, 11, 16), B(0, 15,—12), C(0, 7, 20);
5° A(0, 0, 0), B(17,—25, 25), C(40, 0, 0).

3. Să se determine unghiul dreptei A B cu planul $P \alpha P'$ în cazurile:

1° A(10, 12, 15), B(30, 5, 6), $P \alpha P'$(—5, 5, 7);
2° A(10, 7, 20), B(20, 7, 25), $P \alpha P'$(15, ∞, 10).

4. Să se determine unghiurile pe care le face planul $P \alpha P'$ (15,—10, 20) cu planele de proecțiune.

5. Să se determine unghiurile planelor $P \alpha P'$ și $Q \beta Q'$ în cazurile următoare:

1°. $P \alpha P'$(—15, 14, 14), $Q \beta Q'$(28, 30, 45),
2°. $P \alpha P'$(10,—8,—18), $Q \beta Q'$(30,—24,—30).

6. Să se determine o dreaptă care face cu planele de proecțiune:

1° unghiuri de 40°; 2° cu planul orizontal 50°, iar cu planul vertical 30°.

7. Să se determine un plan care să faca cu planul orizontal un unghiu de 50°, iar cu cel vertical 60°.

8. Să se găsească unghiul a două drepte, având aceiaşi proecţie orizontală.

9. Să se determine unghiul pe care-l face urma verticală a unui plan cu liniile de cea mai mare pantă.

10. Să se determine unghiul pe care un plan îl face cu OX.

11. Să se determine unghiul pe care un plan îl face cu un plan de profil.

12. Să se determine proecţia verticală a unui punct dintr'un plan dat prin urma sa orizontală α P, cunoscând proecţia orizontală a a punctului şi unghiul φ al planului cu planul orizontal.

13. Să se determine urma verticală a unui plan, cunoscând urma sa orizontală α P şi unghiul φ pe care-l face: 1° cu planul orizontal, 2° cu planul vertical.

14. Dacă un plan face unghiuri egale cu planele de proecţie, el este perpendicular pe unul din planele bisectoare.

15. Să se determine planul ale cărui urme sunt confundate, cunoscând unghiul φ pe care îl face cu planele de proecţiune.

16. Să se ducă o paralelă la un plan P care să tae două drepte date sub unghiuri egale.

17. Să se înscrie între urmele unui plan, un segment care să facă cu planul orizontal unghiul φ şi care să aibă mijlocul său pe o dreaptă A B.

18. Să se înscrie între urmele unui plan P, o dreaptă de lungime l care să facă cu planul orizontal, unghiul φ.

19. Să se ducă într'un plan prin punctul său A, o dreaptă care să facă cu planul orizontal, unghiul φ.

20. Printr'o dreaptă A B, să se ducă un plan care să întâlnească planul orizontal sub unghiul φ.

XIV. CERCUL.

1. Să se determine centrul şi punctele remarcabile ale unui cerc care trece prin punctele A, B şi C. Aplicaţie A(0, 15, 0), B(11, 0, 18), C(25, 0, 30).

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

2. Să se determine proecțiile unui cerc trecând printr'un punct A și tangent la două drepte B C și C D, situate în acelaș plan cu A.

3. Un cerc tangent în A la urma orizontală a planului care-l conține, este dat prin proecția sa orizontală. Să se determine proecția verticală.

4. Să se construiască proecțiile cercului celor nouă puncte ale unui triunghiu dat A B C. Ce particularități prezintă proecțiunile acestui cerc?

5. Un cerc de rază dată este situat într'un plan dat și tangent la urmele planului. Să se determine proecțiunile acestui cerc.

XV. SECȚIUNI PLANE.

1. Se dă o prizmă oblică cu baza A B C D E în planul orizontal. 1° Să se determine secțiunea făcută în această prizmă prin planul P σ P'. 2° Să se găsească adevărata mărime a acestei secțiuni. 3° Să se desfășoare suprafața laterală a prizmei, cuprinsă între bază și secțiune. *Aplicație.* A (78, 34,0), B (75, 18,0), C (96, 6,0), D (113, 22,0), E (104, 43,0), A' (—3, 48, 67), P σ P'(13,—16,—26), (A A' este una din muchile prizmei).

2. Se dă o piramidă oblică cu baza A B C D în planul orizontal. 1° Să se determine secțiunea făcută în piramidă prin planul P σ P'. 2° Să se găsească adevărata mărime a acestei secțiuni 3° Să se desfășoare suprafața laterală a piramidei cuprinse între vârf și secțiune. *Aplicație* A (15, 10, 0), B (61, 5, 0), C (70, 22, 0), D (35, 37, 0), S (82, 22 69), P σ P' (102, 80, 140).

3. Se dă un paralelipiped oare care și un plan vertical care tae patru fețe ale acestuia. Să se determine direcția unei drepte în acest plan astfel ca porțiunea cuprinsă în interiorul paralelipipedului să aibă o lungime dată.

4. Se dă un tetraedru și o dreaptă. Să se determine drumul cel mai scurt de pe suprafața tetraedrului, care unește punctele de intersecție ale tetraedrului cu dreapta.

5. Printr'un punct dat, să se ducă un plan care să tae muchile unui triedru sub unghiuri egale.

6. Să se ducă un plan paralel cu O X, care să despartă un tetraedru dat în două părți echivalente.

7. Să se tae un tetraedru print'un plan paralel cu două muchii opuse astfel ca secțiunea să fie un romb.

8. Să se determine direcţia unui plan care să tae feţele unui triedru dat sub unghiuri egale.

9. Să se tae o piramidă patrunghiulară printr'un plan astfel ca secţiunea să fie un paralelogram.

10. Se dă un paralelipiped şi se cere să se determine traseul de pe suprafaţa sa care tăind de două ori fiecare muche a suprafeţii laterale, să unească un vârf al bazei inferioare, prin drumul cel mai scurt.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

RĂSPUNSURI ŞI INDICAŢII

I. 1. Se va reprezenta câte un punct situat în fiecare din semi-planele de proecţie şi bisectoarele lor precum şi câte unul situat în diedrele despărţite de aceste semiplane; se va reprezenta şi un punct pe O X. In total 17 puncte. Pentru ca epura să se prezinte estetic, este bine a se lua punctele pe un cerc situat într'un plan de profil şi cu centrul pe O X, la egală distanţă între ele. 2. 1° Punctul A e în diedrul al 4-lea, iar B în al 2-lea; ele sunt simetrice faţă de primul bisector. 2° A e în diedrul al 2-lea, iar B în diedrul al 3-lea; ele sunt simetrice faţă de planul orizontal. 3° Ambele sunt în diedrul al 4-lea, şi sunt simetrice faţă de planul al doilea bisector. 3. 1° $A_{II}\ (x, y, -z)$, $A_V\ (x, -y, z)$. 2° $A_1\ (x, z, y)$, $A_2(x, -z, -y)$. 4. Cota punctului este a doua catetă în triunghiul dreptunghic care are ipotenuza l şi cealaltă catetă egală cu depărtarea punctului. 5. Se vor lua proecţiile a şi a' ale punctului de o parte şi alta a lui O X şi astfel ca raportul a_1a': a_1a să fie $> tg\ 67^0\ 30'$.

II (Planşa I). 1. 1° (Fig. 1). Dreaptă oarecare, segmentul H V e cuprins în diedrul întâi. 2° (Fig. 2) Segmentul H V e cuprins în diedrul al 2-lea. 3° (Fig. 3) Segmentul H V e cuprins în diedrul al 3-lea. 4° (Fig. 4) Segmentul H V e cuprins în diedrul al 4-lea. 5° (Fig. 5) Orizontală deasupra planului H. 6° (Fig. 6) Orizontală de desubtul planului H. 7° (Fig. 7) Frontală. 8° (Fig. 8) Dreaptă situată în planul vertical. 9° (Fig. 9) Dreaptă situată în primul bisector. 10° (Fig. 10) Verticală. 11° (Fig. 11) Dreaptă de capăt. 12° (Fig. 12) Dreaptă situată în al doilea bisector. 13° (Fig. 13) Dreaptă situată în primul bisector. 14° Linia O X. 15° (Fig. 15) Fronto-orizontală. 2. (Fig. 2) Se va lua $vv'=vk$ şi se va uni k cu h'. Dreapta kh' tae hv în c care e proecţia orizontală a punctului căutat; acest punct se găseşte

în diedrul al 3-lea. Mai este un punct care răspunde problemei: punctul care are ambele proecții confundate în punctul comun dreptelor hv și $h'v'$; acesta se găsește în diedrul al 4-lea. 3. (Fig. 3) Pe o linie de ordine arbitrară se va determina punctul p astfel ca raportul dintre cotă și ordonată să fie cel indicat, iar p' să se găsească pe $h'v'$. Se va uni h' cu p și vom lua intersecția c cu hv. Punctul c răspunde problemei. 2 Soluții (pe figură e indicată numai una). 4. (Fig. 4) Se va duce o paralelă cu proecția verticală a dreptei, la o distanță verticală egală cu l și se va lua intersecția ei cu proecția orizontală și cu simetrica acesteia față de O X; două soluții în general. 5. Triunghiurile dreptunghice H V h' și H V v sunt egale. 6. Avem: $m\,a' : v\,v' = m\,h' : h'v$ și $m\,a : h\,h' = m\,v : h'v$ iar rapoartele din membrul al doilea sunt în valoare absolută, complimentare. 7. 1° Punctele H și V sunt de aceeași parte a lui O X. 2° Punctul din al doilea bisector are proecțiunile sale confundate în punctul de intersecție al diagonalelor. 8. 1° Avem $h\,h' = v\,v'$. 2° Dreapta nu întâlnește planul al doilea bisector, fiindcă proecțiile sale sunt paralele. 9. Fie H urma orizontală și A punctul din primul bisector. Avem: $h\,h' = a_1\,a' = a_1\,a$. 10. Depărtarea ei este jumătate din segmentul B C.

III. (Planșa II). 1 1° Concurente și situate în același plan vertical. 2° Concurente, dreapta C D fiind verticală. 3° Neconcurente. 2. 1° Prin c, se va duce o dreaptă paralelă cu O X până ce întâlnește pe $a\,b$ în d; se va ridica d' pe $a'b'$. 2° Procedeu analog. 3. (Fig. 3) Se va lua intersecția p a dreptei $a\,b$ cu simetrica lui $a'b'$ față de paralela dusă la O X prin mijlocul segmentului $c\,c'$. Dreapta căutată este C P. 4. 1° (Fig 4) C M. 2° Ducem $c\,n \perp a\,b$ fiindcă A B e o orizontală. 3° C P. 4° Se va lua intersecția dreptelor $a\,b$ și $c\,d$ și se va ridica acest punct pe $a'b'$, $z \sim 7$. 5. Fie $c\,o$ una din dreptele care trece prin C și întâlnește linia de pământ; fie m punctul de întâlnire al dreptelor $c'o'$ și $a'b'$, a cărui linie de ordine întâlnește O X în p iar co în m. Raportul $mp : m'p$ este constant. 6. (Fig 6) Ducem o dreaptă oarecare trecând prin c și întâlnind linia de pământ. Scoborîm pe proecția sa orizontală, punctul unde proecția sa verticală întâlnește $a'b'$ și unim acest punct cu a'. Fie p punctul unde această dreaptă întâlnește $a\,b$. Dreapta căutată este C P. Se va ține seamă de pro-

blema precedentă. 7. Se va determina întâi punctul unde BC întâlnește primul bisector (II, 2). 8. Fie m' punctul comun al proecțiunilor verticale date ale dreptelor. Se va lua simetricul m al lui m' față de O X. Proecția orizontală a frontalei este o paralelă la O X dusă prin a, a celeilalte drepte, simetrica proecțiunei sale verticale față de O X. 9. Verticala căutată are ca proecție orizontală. punctul comun proecțiunilor orizontale ale dreptelor date. 10. Punctul de întâlnire al dreptelor date, are proecțiunile sale confundate în punctul comun celor două drepte 11. 1° Problema e nedeterminată, orice dreaptă trecând prin C, care are ca proecție orizontala $c\,a$, va răspunde problemei 2° Problema e nedeterminată: se va uni un punct oarecare de pe proecția dublă a dreptei cu c și c'. 12 (Fig 12) Prin b ducem segmentul $b\,m$ egal cu l și cuprins între $a\,b$ și $c\,d$. Ridicăm m în m' pe $a'b'$, iar prin acest punct ducem o paralelă la O X până în m'_1. Prin m'_1 ducem o paralelă la $a'b'$ care întâlnește $c'd'$ în q'. Segmentul căutat este P Q. Două soluții. Pe figură este representată numai o singură soluție. (*G. M.* Anul XVIII pag 452). 13. Când au proecțiile orizontale confundate. 14. Dacă ducem printr'un punct de pe O X, o paralelă cu dreapta dată, aceasta e cuprinsă în al doilea bisector fiindcă are proecțiile sale confundate. 15. (Fig. 15) Proecția verticală m' a mijlocului segmentului cerut, se găsește la mijlocul segmentului $c'd'$, proecția verticală a dreptei Δ, cuprinsă între proecțiile verticale ale orizontalelor date. Se coboară acest punct pe proecția orizontală a dreptei C D în m, iar prin m se va duce segmentul $p\,q$ astfel ca mijlocul său să se găsească în m. 16. Soluție analoagă; punctul m' va împărți segmentul $c\,d$ în raportul dat. Două soluții. 17. Verticala a cărei proecție orizontală este punctul comun proecțiilor orizontale ale dreptelor date 18. (Fig 18) Fie H B frontala și A V orizontala dată. Dintr'un punct oarecare, de pildă V ducem $v'p'$ și $v\,b$ respectiv perpendicular pe $h'b'$ și $a\,v$. Fie m' punctul comun dreptelor $b'h'$ și $a'v'$, se scoboară acest punct în m pe $\alpha\,v$. Dreapta $m\,p$ întâlnește proecția $h\,b$ în c care ne dă perpendiculara căutată (*G. M.* vol. XVII, pag. 457). 19. Dreapta de intersecție are urma verticală, aruncată la infinit. Perpendiculara comună se proectează în adevărata mărime pe planul vertical și are proecția sa verticală, perpendiculară pe proecțiile verticale ale dreptelor. Proecția sa orizontală va fi deci și ea cunoscută; vom înscri deci un segment orizontal de mărime dată, între proecțiile

orizontale ale dreptelor date. (*Gazeta Matematică*, vol. XVI, pag. 86). 20. Fie m' punctul unde urma verticală a frontalei întâlneşte verticala dată şi n', punctul unde dreapta care trece prin urmele orizontale ale dreptelor date, întâlneşte O X. Dreapta pe care se găsesc urmele orizontalelor este $m'n'$. 21. Problema se rezolvă cu ajutorul unei teoreme cunoscute din geometria plană : dreptele care unesc vârfurile unui patrulater cu centrele de greutate ale triunghiurilor formate de celelalte vârfuri sunt concurente. 22. Problema revine la o teoremă cunoscută din geometria plană : dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse şi ale diagonalelor unui patrulater sunt concurente. 23. Se vor duce alte două drepte care să întâlnească dreptele date şi ale căror proecţii de acelaş nume să se întâlnească în cadrul epurii. 24. (Fig. 24) Fie $a\,b\,c\,d\,e$ proecţia orizontală dată şi $a'b'c'$ proecţiile verticale a trei din vârfurile poligonului. Ducem diagonala $b\,d$ şi ridicăm în m' pe $a'c'$ punctul său de intersecţie m cu $a\,c$. Proecţia d' se găseşte pe dreapta $b'm'$. Aceiaşi construcţie, cu ajutorul lui $(n\,n')$ pentru vârful e. 25. Unghiul diagonalelor trebue să rămână drept.

IV. (Planşa II). 1. 1° Oarecare. 2° De profil. 3° Planul H 4° Planul V. 5° Plan oarecare trecând prin O X. 6° Plan proectant vertical. 7° Plan paralel cu OX. 8° Plan de profil. 9° Plan perpendicular pe planul vertical. 10° Plan paralel cu planul vertical. 2. Se vor întrebuinţa frontale ori orizontale auxiliare. 3. 1°. (Fig. 3) Se va duce dreapta B C, iar prin A se va duce o orizontală a planului, care determină împreună cu C, ambele urme ale planului. 2° Se va duce o dreaptă care să treacă prin C, să întâlnească A B şi să aibă urmele situate în cadrul epurii. Se vor determina apoi cu ajutorul unei frontale şi a unei orizontale, direcţiile urmelor căutate. 3° Planul proectant vertical a cărei urmă orizontală este dreapta $c\,a\,b$. 4. $z \infty$ 13. 5. Se va lua întâi punctul M de întâlnire a planului cu verticala punctului căutat. Se va lua apoi $n'm' = m'm_1$. 6. Se va duce o dreaptă auxiliară în plan şi care să aibă urmele în cadrul epurii. Se vor uni urmele sale cu punctul comun dreptelor de pe O X. 7. Intersecţia planelor este o orizontală. Ducem deci această orizontală care trece prin A şi unim urma sa cu punctele de pe O X ale urmelor paralele date. 8. E perpendicular pe al doilea bisector. 9. Planul are urmele sale confundate (8). Urma sa dublă se obţine unind urmele dreptei

duble. **10.** (Fig. 10) Prin punctul dat de pe O X vom duce o perpendiculară pe $h'v'$ urma orizontală a dreptei de pantă dată. Construim apoi o dreaptă din plan, paralelă cu dreapta dată, ceiace ne determină şi urma verticală a planului. **11.** (Fig. 11) Se va duce o orizontală, de pildă orizontala $c\,d$ care trece prin C, iar din a se va scoborî o perpendiculară pe $c\,d$, care determină imediat linia de pantă AD. **12.** (Fig. 12) Se va lua intersecţia dreptelor $a\,b$ şi $a\,c$ în p şi q cu dreapta paralelă cu O X situată la distanţa l. Se vor ridica p şi q în p' şi q' pe dreptele respective. **13.** E perpendicular pe primul bisector. **14.** Se poate stabili pe cale pur geometrică, cu ajutorul rapoartelor. Se va putea însă observa că sunt intersecţiile planului dat, cu plane paralele între ele şi paralele cu al doilea bisector. **15.** Se proectează un punct oarecare m' al urmei verticale $\alpha P'$ date, în m_1 pe O X. Se va lua intersecţia cercului de diametru $\alpha\, m_1$ cu o paralelă la O X dusă la distanţa $m'm_1$, ceiace determină un punct al urmei orizontale. 4 soluţii în general. **16.** Fie $(h\,v,\ h'v')$ o linie de pantă a planului P α P'. Avem: $v\,v' = \frac{1}{2}\,\alpha\,v = h'h$. **17.** (fig. 17) Fie m' punctul de întîlnire al proecţiunilor verticale şi m acela al proecţiunilor orizontale; fie m_1 şi m_2 proecţiile acestor puncte pe O X. Avem $\alpha\, m_1 = \alpha\, h' + \alpha\, v = \alpha\, m_2$, deci m_1 şi m_2 coincid. **18.** Se va determina fie urma verticală a dreptei, fie mai bine orizontala planului care trece prin punctul dat din planul vertical. **19.** Se uneşte simetricul lui v' faţă de O X cu h. **20.** (Fig. 20) Punctul se găseşte pe frontala P Q de depărtare 20 a planului, şi la o cotă 20. **21.** Paralelele duse prin a' şi a respectiv la proecţiile corespunzătoare ale dreptei şi axa OX trebue să fie concurente. **22.** (Fig. 22) Fie H V şi H_1V_1 cele două drepte date. Din h ca centru cu o rază $h\,k$ egală cu lungimea dată descriem un cerc care tae urma planului dus prin H_1V_1 paralel cu H V în punctul k. Ducem $k\,b \parallel$ cu $h\,v$, iar prin b, $a\,b \parallel$ cu $h\,k$. Segmentul căutat este A B. Două soluţii. **23.** Se va duce de exemplu ceviana A M a triunghiului A B C care tae latura B C în N; proecţia verticală a lui M se găseşte pe proecţia verticală a dreptei A N. **24.** (Fig. 24) Se determină întâi punctul C unde A B tae planul dat. Se va duce $c'm' \parallel$ O X şi se va lua $\alpha\, m' = m'v'$. Dreapta H V împreună cu A B determină planul dat. **25.** Se va duce întâi linia de cea mai mare pantă a cărei proecţie orizontală este l. Planul determinat de această dreaptă şi de punctul A este planul căutat.

V. (Planşa III) 1. (Fig. 1) Se va duce întâi orizontala planului care trece prin A. 2. Primul plan e paralel cu primul bisector, al doilea este perpendicular pe acesta. 3. Din proecţia punctului se va scoborî o perpendiculară pe proecţia dublă a planului. Dreapta e situată în al doilea bisector. 4. Prin m se va duce o paralelă cu proecţia orizontală a liniei de pantă, iar prin m', o perpendiculară pe proecţia verticală a frontalei. 5. Ori ce perpendiculară pe acest plan duse într'un punct din al doilea bisector e situată în al doilea bisector. 6. (Fig. 6) Se va duce prin mijlocul segmentului AC, un plan perpendicular pe AC; intersecţia sa cu axa O X este vârful B. 7. Unghiul orizontalelor se proectează în adevărată mărime pe un plan paralel cu ele. 8. Fie P un plan perpendicular pe H şi Q un altul perpendicular pe acesta. Urma orizontală a planului Q e perpendiculară pe planul P, fiind intersecţia a două plane perpendiculare pe acesta. 9. (Fig. 9) Se va lua simetricul b_1 al punctului b faţă de OX. Urma verticală a planului căutat este $a'b_1$; cea laltă este simetrică faţă de O X. 10. Dintr'un punct arbitrar de pe O X, se va duce o perpendiculară pe planul dat. Această perpendiculară sau un punct de pe ea, împreună cu OX, determină planul dat. 11. Printr'un punct M al dreptei se va duce o perpendiculară pe plan; planul determinat de aceasta şi de dreapta noastră e planul căutat. 12. Se vor determina prealabil o frontală şi o orizontală în plan. 13. (Fig. 13) Prin h se va duce o perpendiculară pe hv până ce întâlneşte O X în m; se va lua intersecţia dreptei $v'm$ cu d' în p'. Urma orizontală este punctul P, iar proecţia sa orizontală e perpendiculară pe hv. 14. De profil. 15. Se va determina întâi punctele d care împarte segmentul ab în două părţi astfel ca $\overline{ad}^2 - \overline{bd}^2 = k^2$. Prin aceste puncte se vor duce plane perpendiculare pe A B. Două soluţii.

VI. (Planşa III). 1. (Fig. 1) Se vor duce fronto orizontalele care trec prin A şi B. După aceia se va determina o dreaptă oarecare H V situată în planul acestora. Paralele la O X duse prin v' şi h sunt urmele planului. 2. (Fig. 2) 1° Se va duce prin A o dreaptă paralelă cu primul bisector. Urmele planului sunt paralele la O X duse prin urmele acestei drepte. 2° Metodă analoagă. 3° Paralela prin a' dusă la O X. 4° Se va determină întâi orizontala care trece prin A. 3. 1° Nu sunt paralele. 2° Da. 4. (Fig. 4) Fie o' punctul de întâlnire al proecţiunilor verticale ale fronta-

lelor şi A B. Una din dreptele date, rezemată în A şi B pe cele două frontale. Fie M punctul de pe A B, care se găseşte pe linia de ordine a lui o'. Avem : $a\,m : m\,b = a'\,m' ; m'\,b' = \text{const.}$ Deci m e fix. 5. Prin M se va duce un plan paralel cu A B C sau trecând prin una din laturile triunghiului determinat de mijloacele laturilor sale ; 4 soluţii. 6. Plane perpendiculare pe A B C şi paralele cu mediana cea mai mică a triunghiului A B C 7. Planele care trec prin M N şi prin : 1° mijlocul segmentului A B, 2° punctul C de pe dreapta A B astfel ca A B = B C, sau B A = A C. Trei direcţii de plane. 8. Planul dus prin dreapta dată paralel cu A B şi planul trecând prin dreaptă şi mijlocul segmentului A B. 9. (Fig. 9) Se uneşte B cu un punct arbitrar de pe O X şi se duce prin A o dreaptă paralelă cu B M. Prin urmele acestei drepte se vor duce paralele la O X. 10. Se va determina o dreaptă D din plan a cărei proecţie verticală e paralelă cu $a'b'$; prin a se va duce o paralelă cu proecţia verticală a dreptei D. Se va lua intersecţia acestei paralele cu linia de ordine a lui b'.

VII. (Planşa IV). 1. $a'b' : b'c' = a\,b : b\,c$. 2. Se va rabate planul de profil pe planul vertical şi se vor lua intersecţiile dreptei rabatute cu dreptele la 45° duse prin punctul urmei de pe O X. 3. (Fig. 3) $z \sim 17$. Fie e punctul unde $c\,d$ taie urma planului de profil al dreptei A B. Se va determina punctul E situat pe A B, a cărei proecţie verticală este e', şi se va uni e' cu c'. Dreapta $e'c'$ taie linia de ordine a lui d în d'. 4. Se vor determina urmele dreptei de profil sau se va duce o dreaptă auxiliară a planului. 5. Pantele lor sunt egale ; panta dreptei A B e dată prin raportul $a'b' : a\,b$. 6. (Fig. 6) Fie D proecţia lui A pe planul de profil al dreptei B C ; fie M punctul unde planul de profil B C taie O X. Se va lua intersecţia P a dreptei M D cu B C. Dreapta căutată este A P. 7. (Fig. 7) Fie P', P şi Q' Q punctele unde linia de ordine a originei O întâlneşte urmele planelor date. Trebue să avem O P' : O P = O Q' : OQ. 8. Prin urmele dreptei se vor duce paralele cu O X ; acestea sunt urmele planului. 9. (Fig. 9) Se va rabate punctul A în A_1 pe planul vertical ; Pe O z se va lua $o\,m = \pm 3$ iar pe OX $o\,n = \pm 5$. Se va duce apoi prin A, o paralelă cu $m\,n$. Două soluţii. 10. (Fig. 10) In mod analog prin A_1 se va duce o dreaptă oarecare prin A, care taie O X în m, şi se va lua pe ea $A_1\,n = \frac{4}{5}\,A_1\,m$. Se va duce apoi prin n o paralelă la O X care taie O Z în V ; două soluţii. 11. Fronto-orizontala,

care trece prin punctul de întâlnire al rabaterilor lor. 12. Pe urma planului dat situată într'un plan de profil oarecare se va determina punctul ale cărui coordonate sunt în raportul dat. Două soluţii. 13. (Fig. 13) Se va tăia planul dat cu planul profil, care trece prin a, şi se va rabate intersecţia pe planul vertical. Intersecţia verticalei care trece prin a, cu această rabatere este punctul A. 14. (Fig. 14) Se va determina linia de ordine pe care proecţiile de acelaş nume ale dreptelor date determină de o parte şi alta a lui O X, segmente egale. 15. (Fig. 15) Se va scoborî din A o perpendiculară pe planul de profil B C, fie D piciorul acestei perpendiculare. Din D se va coborî o perpendiculară pe dreapta B C până în M. Perpendiculara căutată este A M.

VIII. (Planşa IV). 1. Linia de pământ O_1X_1 e $\perp$ pe OX şi situată la o distanţă l de a; două soluţiuni. 2. Linia de pământ O_1X_1 e $\perp$ pe $a'm'$ şi la o distanţă de m' egală cu cota punctului A. 3. Problema e nedeterminată; linia O_1X_1 trebue să fie tangentă la cercul descris din a ca centru şi având raza egală cu cota punctului. 4. (Fig. 4) Direcţia liniei O_1X_1 e tangenta dusă din α la cercul având centrul în b' şi raza $b\,b'$. Problema admite 2, 1 sau nici o soluţiune după poziţia lui a faţă de cerc 5. (Fig. 5) Se construeşte triunghiul dreptunghic având l ca ipotenuză şi una din catete egală cu diferenţa algebrică a cotelor punctelor A şi B. Cu cealaltă catetă ca rază, se descrie un cerc din a ca centru şi se ia intersecţiile m şi n ale acestui cerc cu cercul având $a\,b$ ca diametru. Noua linie de pământ trebue să fie $\parallel$ cu $a\,m$ sau $a\,n$; problema admite 2, 1 sau nici o soluţiune. Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca $l > h$; h reprezintă diferenţa de nivel a punctelor A şi B. 6. VIII. 4° 7. Se va lua O_1X_1 $\perp$ pe urma orizontală a unui plan paralel cu ambele drepte date. 8. 1° Se duce A'B' $\parallel$ cu A B şi întâlnind C D. Se scoboară apoi dintr'un punct oarecare M al dreptei A B, o perpendiculară M P pe planul A'B', C D. (VIII 17). 2° Prin P se va duce o $\parallel$ cu A B care tae C D în Q; în Q se ridică o perpendiculară pe planul (A'B', CD) care e perpendiculara căutată. 9. Fie ($a'b'$, $a\,b$) dreapta dată. Se va lua ca nou plan vertical, un plan de profil; fie α punctul comun celor două linii de pământ. Perpendiculara scoborîtă din a pe a_1b_1 este proecţia orizontală a dreaptei căutate; se va reveni la vechiul sistem. 10. Soluţiunea dată acestei chestiun (VII. 11)

este de fapt făcută cu ajutorul schimbării planului vertical printr'un plan de profil. **11.** Această chestiune deja tratată (III, 18) se poate rezolva uşor şi printr'o schimbare de plan vertical. Fie A B orizontala şi C D frontala. Se ia $O_1X_1 \perp a\,b$; vom scoborî din a'_1 o $\perp$ pe $c'_1d'_1$ care va fi perpendiculara căutată; se va reveni la vechiul sistem. **12.** Fie $P\,\alpha\,P'$ planul dat; dintr'un punct oarecare m de pe $P\,\alpha$ descrim un cerc cu o rază arbitrară r şi luăm intersecţia n a acestui cerc cu orizontala de cotă r. Tangenta la cerc în n ne dă direcţia liniei O_1X_1; 2, 1 sau nici o soluţiune. **13.** Se va lua ca plan vertical, un plan $\perp$ pe urma orizontală a planului; se va roti în acest sistem urma verticală de unghiul α şi se va reveni la vechiul sistem. **14.** Se va lua $O_1X_1 \perp a\,b$. Din p se scoboară o perpendiculară pe O_1X_1 în α_1 şi se uneşte α_1 cu α'_1, noua proecţiune verticală a dreptei A B. Urma verticală a planului este $\alpha_1\alpha'_1$, iar unghiul acesteia cu O_1X_1, este unghiul căutat. **15.** (Fig. 15) Se va duce orizontala $(mb, m'b')$ şi se va lua $O_1X_1 \perp mb$, Noua urmă verticală este $O_1m'_1$ $(m'_1k_1 = m'k)$; unghiul căutat este φ. **16** (Fig. 16) Vom lua $O_1X_1 \perp \alpha\,P$; fie $\alpha'P'_1$ şi m'_1 noua urmă verticală a planului şi noua proecţiune verticală a punctului. Din m'_1 scoborâm perpendiculara $m'_1p'_1$ pe $\alpha'P'_1$; lungimea $m'_1p'_1$ reprezintă distanţa cerută. **17.** Se va determina o orizontală $(m\,n, m'n')$ a planului şi se va lua $O_1X_1 \perp m\,n$; noua urmă verticală se va obţine cu ajutorul acestei orizontale şi a unui punct din planul orizontal. Restul ca la No. precedent. **18.** Se va lua $O_1X_1 \parallel a\,b$. Din m'_1 se duce $m'_1p'_1 \perp a'_1b'_1$, ceiace determină piciorul perpendicularei; se revine apoi la vechiul sistem **19.** Se ia $O_1X_1 \perp$ pe urmele orizontale ale planelor şi se caută urma verticală a unui plan; cealaltă este $\parallel$ cu aceasta. Distanţa dintre noile urme verticale este distanţa căutată. **20.** Se va lua ca nou plan vertical, un plan $\parallel$ cu intersecţia celor 2 plane.

IX. **1.** 1° Se descrie din O un cerc cu raza $o\,a$ până ce întâlneşte O X în m şi n, căre sunt noile proecţii orizontale ale punctului căutat. 2° Se duce orizontala planului a cărei proecţie verticală trece prin a'. Se va lua intersecţiile m şi n ale proecţiei sale orizontale cu cercul descris din O cu raza $O\,a$. Unghiurile de rotaţie sunt $\sphericalangle a\,o\,m$ sau $\sphericalangle a\,o\,n$. **2.** Se duce prin m' o $\parallel$ la OX care tae $b'a'$ în c'; se scoboară c pe $a\,b$. Punctul m se va găsi la intersecţia cercului descris din O cu raza O C şi a liniei de or-

dine dusă din m'. 3. Se duce orizontala planului $P\,\alpha\,P'$ care determină pe cercul de centru O şi de rază l, o coardă văzută din O sub unghiul $\beta - \alpha$; fie $o\,m$ şi $o\,n$ razele extremităţilor coardei, luate în sensul positiv de parcurgere pe cerc. Se va lua pe cerc în sensul negativ arc. $m\,a = \alpha$, ceiace ne dă în a, proecţia orizontală a punctului căutat. 4. Se construeşte triunghiul dreptunghic isoscel $o\,p\,m$, ceiace determină proecţia o a axei verticale căutate; două soluţiuni. 5. Se face o schimbare de plan, luându-se ca plan orizontal un plan $\perp$ pe frontala dată, care devine astfel verticală; problema se reduce la (IX. 1. 2°). 6. Se vor face două schimbări de plane succesive pentru a face axa verticală. 7. 1° Se va roti dreapta astfel ca mijlocul ei sau unul din punctele care o împarte în raportul dat, să vină în P (IX. 1. 2°). 2° Se duce prin intersecţia planului dat cu axa O, o paralelă la A B şi se roteşte aceasta până ce vine în planul P; în această rotaţie, A B va deveni $\parallel$ cu planul P. 3° Se reduce la precedenta, planul P fiind al doilea bisector. 8. (Fig. 8) Fie $(a\,b, a'b')$ dreapta dată, o proecţia orizontală a axei şi m' punctul unde proecţia verticală a axei întâlneşte $a'b'$. Se va lua intersecţia n' a orizontalei $p'p'_1$ cu cercul descris din m' cu o rază egală cu $o\,p$ ($o\,p \perp a\,b$); $m'n'$ este proecţia verticală a dreptei după rotaţia cerută. Două soluţiuni. 9. Se va lua intersecţia cercului descris din O, de rază $o\,b$ cu dreapta $o\,a$. 10. In acest caz un segment A B are proecţiile egale. Se va duce prin punctul unde $a'b'$ tae axa, o dreaptă astfel ca segmentul cuprins între paralele la OX duse prin a' şi b' să fie egal cu $a\,b$; două soluţii. 11. Se va lua un nou plan $\perp$ pe orizontala dată. Se va roti de 180°. 12. Prin mijlocul segmentului B C se duce planul $\perp$ pe B C. Se va roti până ce acest plan trece prin A (IX. 1.2°). 13. Trebue ca perpendiculara comună să devină o frontală. Direcţiunea perpendicularei comune care se cunoaşte imediat, ne determină prin proecţiunea orizontală, unghiul de rotaţie necesar (*G. M.* vol. XVI No. 3). 14. Prin rotaţia precedentă (*G. M.* vol. XVI). 15. Axa este paralela dusă prin mijlocul perpendicularei comune la bisectoarea unghiului celor două drepte; două soluţiuni. 16. Axa are ca proecţie orizontală, centrul cercului circumscris triunghiului $a\,b\,c$. 17. Se va lua o orizontală ajutătoare. 18. 1° Se duce orizontala planului care trece prin m', şi cercul descris din O tangent la proecţia orizontală a acesteia. Din m_1, proecţia lui m' pe OX se duce o tangentă

la cerc; unghiul acestei tangente cu proecţia orizontală este unghiul de rotaţie; două soluţiuni. 2° (Fig. 18) Se duce prin punctul unde axa înţeapă planul, o ∥ la dreapta dată. Se va roti până ce urma orizontală a planului trece prin urma orizontală acestei drepte; două soluţiuni. 19. Se ia pe axă o lungime op egală cu cota orizontalei care trece prin punctul comun axei şi planului. Din p se duc tangente la cercul tangent urmei orizontale a planului; descris din O ca centru, acestea sunt noile direcţii ale urmei planului. Două soluţiuni. 20. (Fig. 20) Se duce un plan de profil Q. Se scoboară din β o perpendiculară βC pe AB, şi se ia $\beta P_1 = \beta C$. Noul plan este $P_1 \alpha P_1'$ iar unghiul de rotaţie $\sphericalangle C\beta X$; două soluţii.

X. 1. (Fig. 1) Presupunem problema rezolvată; fie $(a'a)$ punctul A. Trebue să avem $a'a = ma'$ şi $pa_1' = pA_1$. De aci construcţia: Punctul a_1' se va găsi la intersecţia cercului descris din p cu raza pA_1 şi a dreptei nr dusă astfel că $pq = pr$. In general două soluţii. 2. Prin H, punctul de intersecţie al dreptelor A_1B_1 şi αP, se duce o paralelă la OX; aceasta e proecţiunea orizontală a frontalei. De aci se deduce a, apoi a_1'; urma verticală e paralela dusă prin α la proecţia verticală a frontalei. 3. Se descrie pe A_1B_1 un segment capabil de unghiul dat şi se ia intersecţia sa cu OX, ceiace determină α; αA_1 şi αB_1 vor fi urmele rabatute ale planului. De aci se va trece la urmele din spaţiu; în general, două soluţii. 4. Fie (mm') punctul de pe $\alpha P'$ astfel încât cota sa să fie egală cu cota dată. Să descriem din α cercul de rază $\alpha m'$ precum şi cercul pe A_1m ca diametru. Fie n unul din punctele de intersecţie al acestor cercuri. Dreapta αn este rabaterea urmei verticale; două soluţii; în general. 5. Se construeşte triunghiul A_1aa_1 dreptunghic în a şi în care aa_1 e egal cu cota dată. Se ridică o perpendiculară pe mijlocul lui A_1a_1 care tae A_1a în m. Prin m se duce o perpendiculară pe A_1a care e urma orizontală căutată. Urma verticală se construeşte imediat, ducându-se orizontala punctului A. 6. Se va rabate planul dat pe planul orizontal şi problemele revin la probleme cunoscute din Geometria plană. 7. Se va rabate şi se vor opera construcţiunile în planul rabatut; se vor ridica apoi punctele astfel obţinute. 8. Se va rabate pe planul orizontal trecând prin AB. 9. Se va rabate pe planul orizontal; linia de pantă trecând prin M, se va rabate după perpendiculara scobortă

din m pe αP. Determinăm pe această dreaptă punctul M_1 şi construim pătratul de latură dată având M_1 ca centru iar dreapta $M_1 m$ ca diagonală. Vârfurile astfel obţinute se vor ridica pe plan. 10. Se va rabate raza dată pe planul orizontal în $O_1 A_1$ cu ajutorul punctului O. Se va construi în rabatere, exagonul căutat cu ajutorul razei $O_1 A_1$. Se vor ridica apoi punctele strict necesare. 11. Se va rabate pe planul orizontal şi se vor efectua operaţiunile cunoscute de geometrie plană între urmele rabatute ale planului. 12. Se va determina întâi în rabatere punctul ale cărui distanţe la urmele rabatute sunt cunoscute. 13. In rabatere, segmentul trece prin mijlocul dreptei αA_1. 14. Printr'un punct oarecare M al dreptei, se duce un plan perpendicular pe dreaptă. Problema s'a redus la X. 11. 1°. 15. Fie (h', h) urma orizontalei care trece prin (a', a) din planul cerut $P \alpha P, H_1$ rabaterea lui H şi m punctul unde $h H_1$ tae αP. Triunghiul $\alpha m H_1$ se poate construi deci şi $\alpha h h'$. Vom construi deci într'un punct arbitrar α, triunghiul $\alpha h h'$, după aceia triunghiul $\alpha m h$. Direcţiunea αm este direcţiunea urmei orizontale a planului, ceiace determină planul. 16. (Fig. 16). Dintr'un punct m de pe OX se duce o perpendiculară pe OX şi o perpendiculară pe αP. Urma verticală va fi o dreaptă dusă prin α astfel încât segmentul cuprins între dreptele de mai sus să aibă mijlocul în α. 17. (Fig. 17). Se construesc liniile $P'a$, $P\,a$ şi $P_1\alpha$, cu ajutorul elementelor date, şi se va determina pe această figură, direcţia liniei de pământ astfel: fie H un punct arbitrar pe dreapta αP_1 se ia pe $\alpha P'$, $\alpha h = \alpha H$ şi se descrie pe αh ca diametru un cerc. Intersecţia acestui cerc cu dreapta Hm, l pe αP dă un punct care unit cu α determină direcţia liniei de pământ ; două soluţii. 18. Se va rabate planul triunghiului pe planul orizontal şi se va cerceta latura cea mai mare, căreia i se opune mediana cea mai mică. 19. Se duce prin M mijlocul lui AB, un plan P perpendicular pe AB care tae planul dat după dreapta D. Se rabate planul P pe planul orizontal şi din M_1 se va tăia dreapta D_1 cu un cerc de rază egală cu înălţimea triunghiului echilateral, ceiace dă rabaterea vârfului C ; două soluţii. 20. Fie B' proecţia lui B pe planul P şi $B B' = d$. Punctul căutat se va gasi la intersecţia cercului descris în P din A ca centru şi raza l cu cercul descris din B' cu raza $\sqrt{l^2 - d^2}$. Această intersecţie se determină prin rabatere ; două soluţii.

XI. (Planşa V). 1. O dreaptă de profil. 2. Se ia intersecţiile D şi E ale dreptelor AB şi AC cu planul de profil dat.

Se rabate dreapta D E, în D_1E_1 pe planul vertical. 3. Se ia intersecţia planelor date cu un acelaş plan orizontal care tae planele P' după două orizontale ce se întîlnesc în P (p', p). Intersecţia căutată este (αp, $\alpha' p'$). 4. (Fig. 4) Se vor tăia planele cu două plane frontale: 12 şi 34. Primul tae planul P α P' după o frontală iar planul dreptelor după dreapta (12, 1'2'); aceste două drepte se întâlnesc în N ($n'n$). De asemenea celalt plan determină punctul de intersecţie M ($m'm$). Intersecţia căutată este M N. 5. Se va întrebuinţa un plan auxiliar orizontal trecând prin A. Acesta tae planul dat după orizontala ($a'p'$, ap) iar planul O X, A) după paralele la O X dusă prin A; aceste două drepte se tae în I (i', i). 6. Se va lua intersecţia planului P α P' cu planele verticale proectante ale dreptelor A B şi B C, ceiace dă dreptele H V şi H_1V_1. Se va lua intersecţia n' a dreptelor $a'b'$ şi $h'v'$, precum şi intersecţia m' a dreptelor bc şi $h_1'v_1'$. Intersecţia căutată este dreapta M N. 7. (Fig. 7) Urmele orizontale ale planelor sunt perpendiculare, una pe ab în a şi cealaltă pe cd în d; ele se întretae în h. Se determină apoi urmele verticale ale planelor care se tae în v'; intersecţia căutată este ($h'v'$, hv). 8. Fie M punctul de întâlnire al urmelor duble; intersecţia este dreapta de profil perpendiculară pe al doilea bisector, ale cărei urme sunt confundate în M. 9. 1° Intersecţia cu primul bisector este paralela la O X, a cărei proecţie orizontală este P, iar cea verticală, simetrica acesteia în raport cu O X. 2°. Se va determina punctul M ($m'm$) pe o orizontală oarecare şi având proecţiunile simetrice. Intersecţia este ($\alpha'm'$, αm). 10. Se va uni un punct B de pe O X cu A şi se va lua intersecţia M a acestei drepte cu planul P α P'. Intersecţia căutată este paralela la O X dusă prin M. 11. $z \backsim 14$. 12. Se va determina întâi punctul M de întâlnire al dreptei D cu planul P. Prin M se va duce un plan Q perpendicular pe D; dreapta căutată va fi intersecţia planelor P şi Q. 13. (Fig. 13) Planul A B C este orizontal; se va lua intersecţia verticalei care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului abc, cu planul dus prin mijlocul segmentului A D şi perpendicular pe A D. Intersecţia O (o o') este centrul căutat. 14. Prin M se vor duce perpendiculare pe planele date; aceste două perpendiculare determină planul căutat. 15. Prin M se va duce un plan perpendicular pe D şi altul paralel cu planul dat; dreapta căutată este intersecţia acestor plane. 16. Vom construi întâi planele P şi Q care conţin M N şi sunt perpendicu-

lare respectiv pe A B şi C D. Se ridică apoi pe $m'n'$, punctele de intersecţie r şi s ale lui $m\,n$ cu $a\,b$ şi $c\,d$; prin r se duce o perpendiculară pe urma verticală a planului P, prin s o perpendiculară pe urma verticală a planului Q. Aceste perpendiculare sunt proecţiile verticale căutate. 17. Prin m se duce o tangentă la cercul descris din o de rază l; această tangentă e proecţiunea orizontală a dreptei căutate; în general: două soluţiuni. 18. Problema e nedeterminată; printr'un punct M al dreptei D_1 şi prin dreapta D_2 se duce un plan care tae D_3 în P. Dreapta M P răspunde chestiunii. 19. Acelaş procedeu ca la No. precedent. 20. Prin M se duce un plan paralel cu P şi se ia intersecţia lui cu D. 21. Se ia intersecţia dreptei D, cu planul perpendicular pe A B, dus prin mijlocul său. 22. Vârful C se va găsi pe dreapta de intersecţie D a planului P cu planul perpendicular pe A B dus prin mijlocul său Restul ca la XII, 4. 23. Se va lua intersecţia planului cu plane duse perpendicular pe A B şi B C în mijlocul lor. 24. Axa căutată este intersecţia planelor duse perpendicular pe segmentele A C şi B D sau A D şi B C în mijloacele lor. 25. Se va tăia cu un plan auxiliar orizontal H, iar intersecţiile se vor determina făcându-se rabaterile unghiurilor de pantă.

XII. 1. 1° Una din cele trei metode obişnuite; d ∾ 29. 2° Se va rabate în jurul axei O X. Distanţa e A B ∾ 40. 3° Se va rabate planul de profil pe planul vertical, d ∾ 27. 4° Se va întrebuinţa de preferinţă o rotaţie în jurul verticalei punctului A d ∾ 29,5. 2. 1° Se va rabate planul de profil al punctului A, pe planul vertical şi se va scoborî perpendiculara din A, pe urma din planul de profil a planului dat, d ∾ 17. 2° Metoda obişnuită; d ∾ 11. 3° Se scoboară o perpediculară din a pe urma orizontală a planului; d ∾ 7,5. 3. 1° Dreapta A B este O X; distanţa e ipotenuza triunghiului având drept catete depărtarea şi cota; d = 25. 2° Se va scoborî din C o perpendiculară pe frontala A B şi se va afla mărimea ei; d ∾ 9. 4. Se va rabate planul A B C în jurul orizontalei sale trecând prin B; în planul astfel rabatut se va lua intersecţia dreptei A_1B_1 cu cerçul descris din C_1 de rază l; două soluţii în general. 5. Se construeşte triunghiul dreptunghic isoscel care are ca ipotenuză distanţa urmelor la O X. 6. Se va duce planele depărtate de P cu distanţa l şi se va lua intersecţia dreptei H V cu aceste plane; două soluţii M şi N; M (46,—4, 26),

N(92,—37,53). 7. Se va determina întâi direcţiunea dreptelor planului paralel cu al doilea bisector, ducându-se o dreaptă din plan având urmele egal depărtate de O X. Se va rabate pe planul orizontal şi se va duce între urmele rabatute un segment paralel cu o direcţie dată şi de lungime dată; două soluţii. 8. Se va face o schimbare de plan luându-se drept O_1X_1, perpendiculara dusă din a pe αP care tae αP în β; fie a_1' noua proecţie verticală a punctului A. Din a_1' ca centru cu rază l se descrie un cerc; tangentele duse din β la acest cerc sunt urmele verticale ale planului. Se va reveni apoi la vechiul plan vertical. 9. (Fig. 9) Se va construi întâi o dreaptă având urmele paralele şi la distanţa $a\,a'$ de O X. Se va duce apoi paralele prin A; în general două soluţiuni. 10. Proecţiunea a este la intersecţia paralelei cu O X dusă la distanţă egală cu depărtarea punctului şi a cercului descris din b cu raza $\sqrt{l^2 - R^2}$, h fiind diferenţa dintre cotele punctelor A şi B, în general 8 soluţiuni. 11. Se determină întâi direcţiunea proecţiunii orizontale a dreptei căutate; se va face apoi o schimbare de plan vertical astfel ca dreapta să devină o frontală. 12. Se va face o schimbare de plan luându-se planul de profil al punctului α ca plan vertical. Se va descrie în acest plan, cercul de centru α şi raza l; se va lua intersecţia m_1 a acestuia cu cercul de diametru $\alpha a_1'$. Dreapta $a_1'm_1'$ este noua proecţie verticală a dreptei căutate. Se va reveni apoi la vechiul sistem. 13. Se va lua intersecţia dreptei date din planul vertical cu paralele la O X, omotetica în raportul m, faţă de a' a axei O X; această intersecţie ne dă urma verticală v'. 14. Fie A' şi B' proecţiile punctelor A şi B pe dreapta D; se va determina punctul de pe A'B' astfel ca M A': M B' = A A': B B'. Linia frântă A M B este drumul căutat. 15. Cota punctului A e egală cu cota punctului B, mărită sau micşorată cu distanţa $\sqrt{l^2 - h^2}$, h fiind lungimea proecţiei $a\,b$. 16. Se va scoborî din B o perpendiculară $B\,B' = p$ pe planul $P\alpha P'$; distanţa dreptei de punctul B' este $r = \sqrt{l^2 - p^2}$. Dreapta este tangenta dusă din A la cercul descris din B' cu raza r; două soluţii în general. 17. Fie p şi p' depărtările punctelor A şi B; dreapta căutată este una din tangentele comune ale cercului descris din a' cu raza $\sqrt{l^2 - p^2}$ şi a celui descris din b' cu raza $\sqrt{l'^2 - p'^2}$. 18. (Fig. 18) Fie M mijlocul segmentului B C. Pe $a\,m$ ca diametru se va descrie un cerc; se va lua intersecţia γ a

acestui cerc cu planul dus prin M perpendicular pe BC. Dreapta căutată este $a\gamma$. Demonstrația se bazează pe teorema: pentru ca două puncte ale unei drepte să fie egal depărtate de o altă dreaptă, trebue și e de ajuns ca ea să fie la egală distanță de perpendiculara comună a acelor drepte. 19. Fie Q planul dus prin dreapta dată, paralel cu direcțiunea considerată și D intersecția planelor P și Q; problema s'a redus la X, 11, 2°. 20. Proecția orizontală a dreptei este tangenta comună a două cercuri descrise din urmele verticalelor cu razele date. 21. (Fig. 21) Dintr'un punct de pe urma orizontală de exemplu, a planului dat se va lua paralel cu direcția dreptei, o lungime $AB=l$ și prin B se va duce un plan paralel cu planul dat. Două soluții în general. (Pe figură e trasată numai una din soluții). 22. Se va lua intersecția unei fronto-orizontale cu un plan paralel cu planul dat și situat la o distanță l de acesta. 23. Centrul se va găsi pe dreapta de intersecție a planului orizontal a cărui depărtare de planul orizontal de proecțiune este r, cu planul perpendicular pe AB dus prin mijlocul său. Problema s'a redus la XII 4. 24. Centrul este la intersecția a trei plane paralele cu planele date și situate la distanța r de acestea; 8 soluții. 25. Din a' cu o rază egală cu distanța dată se descrie un cerc. Fie αP urma orizontală dată; din a se va duce o tangentă la acest cerc, două soluții în general.

XIII. 1. Se va rabate ambele plane de proecțiune $\varphi_h \sim 26°$, $\varphi_v \sim 20° 30'$. 2. 1° Se aplică metoda obișnuită, rabatându-se pe planul orizontal; $\varphi \sim 63° 30'$. 2° Dreapta BC fiind orizontală, se va rabate în jurul ei, pe planul său orizontal: se scoboară din a o perpendiculară pe bc până în d și se ia pe această dreaptă lungimea dA_1 egală cu ipotenuza triunghiului dreptunghic având drept catete ad și cota orizontalei; unghiul este $\varphi = cbA \sim 106°30'$. 3° Se va rabate pe planul orizontal al dreptei AB; $\varphi \sim 128°$. 4° Se va rabate planul de profil pe planul vertical; $\varphi \sim 7° 30'$. 5° Fie d proecția lui b pe OX. Se va lua pe bd_1, $dB_1 = db\sqrt{2}$; unghiul este $\varphi = aB_1c \sim 58°$. 3. 1° (Fig. 3) Se aplică metoda obișnuită ducându-se din B o perpendiculară pe plan și aflându-se unghiul acesteia cu AB, care e complimentul unghiului cerut; $\varphi \sim 73°$. 2° Planul e perpendicular pe planul vertical iar dreapta o frontală; unghiul căutat este deci unghiul dintre proecția verticală a dreptei și urma verticală a planului: $\varphi \sim 61° 30'$. 4. Se aplică

metoda obişnuită; $\varphi_H \backsim 67^0\ 30'$, $\varphi_V \backsim 39^0\ 30'$. **5.** 1° Metoda obişnuită; $\omega \backsim 106^0$. 2° Planele au urmele lor orizontale paralele. Se va tăia cu un plan perpendicular pe aceste urme şi se va rabate pe planul orizontal; $\omega \backsim 17^0$. **6.** 1° Se ia un punct v' şi se proectează în v pe OX; se duce prin v' dreapta $v'H_1$ astfel ca $\sphericalangle v'H_1X = 40^0$. Se descrie din v un arc cu raza vH_1 şi se ia pe acest arc punctele situate la o distanţă vv' de OX; două soluţiuni. 2° (Fig. 6). Dintr'un punct v' se duce o dreaptă $v'H_1$ care face cu OX unghiul de 50°, apoi $v'H_2$ astfel ca $\sphericalangle H_1v'H_2 = 30^0$, iar $v'H_2 = v'H_1$. Din H_2 se scoboară o perpendiculară pe $v'H_1$ care întâlneşte $v'H_1$ în h_1; se descrie din v' un arc de cerc de rază $v'h_1$ pînă ce întâlneşte OX în h'; proecţia verticală a dreptei este $h'v'$. Punctul h se va determina apoi prin intersecţia cercului descris din v cu raza vH_1 şi a perpendicularei duse din h' pe OX. **7.** Se va aplica metoda obişnuită sau mai bine se va duce mai întâi dreapta care face cu planele de proecţii, unghiuri egale cu complimentele unghiurilor date; se va duce apoi un plan perpendicular pe această dreaptă. **8.** Se rabat dreptele pe planul orizontal în jurul proecţiunei orizontale comune. **9.** Se rabate planul dat pe planul orizontal şi se ia complimentul unghiului urmelor rabatute. **10.** Dintr'un punct de pe OX se scoboară o perpendiculară pe plan şi se determină unghiul acesteia cu OX; unghiul căutat este complimentul unghiului astfel obţinut. **11.** Unghiul pe care-l face cu OX, perpendiculara scoborâtă pe plan dintr'un punct de pe OX. **12.** Din a se scoboară o perpendiculară ap pe αP; se construeşte triunghiul apA_1 dreptunghic în a astfel ca $\sphericalangle apA_1 = \varphi$. Lungimea aA_1 este cota punctului A. **13.** 1° Se duce o perpendiculară pe αP care întâlneşte axa OX în v şi αP în p; se construeşte triunghiul vpV_1 dreptunghic în v astfel ca $\sphericalangle vpV_1 = \varphi$. In v se ia, perpendicular pe OX, $vv' = vV_1$; Urma verticală este $\alpha v'$. 2° (Fig. 13) Presupunem problema rezolvată. Intr'un punct arbitrar h, construind triunghiul de rabatere phk, care se poate construi în mărime, fiindcă cunoaştem $\sphericalangle p$ şi hk. Punctul m va fi deci la intersecţia semicercului ah cu cercul având centrul în h şi raza hn. **14.** Perpendiculara pe acest plan face unghiuri egale cu ambele plane de proecţie; deci e paralelă cu unul din planele bisectoare. **15.** Se construeşte un triunghiu abB_1 dreptunghic în b, în care $\sphericalangle baB_1 = \varphi$. In a se duce o paralelă cu bB_1 şi se ia intersecţia m a acestei paralele cu cercul de centru

b şi rază $b\,B_1$. Scoborâm din b o perpendiculară pe $b\,m$. Aceasta e direcţia linei O X faţă de $a\,m$ care e urma planului căutat. **16.** Printr'un punct A se vor duce A B, A C paralele cu dreptele date şi se va construi planul Q care trece prin bisectoarea acestui unghiu şi e perpendicular pe A B C; intersecţia planelor P şi Q dă direcţiunea dreptei date. Problema sa redus la o problemă cunoscută. **17.** Se va duce în planul P, într'un punct oarecare al urmei sale orizontale, o dreaptă C D care face cu planul orizontal unghiul φ. Se duce prin A B un plan paralel cu C D; problema s'a redus la o problemă deja tratată (X, 11, 2°). **18.** Vom construi întâi direcţiunea dreptelor din planul P, care fac cu planul orizontal unghiul φ; problema se rezolvă apoi imediat prin rabatere. **19.** Prin a' se va duce o dreaptă $a'c'$ care întâlneşte O X în c' sub unghiul φ. Din a ca centru, cu o rază egală cu proecţiunea lui $a'c'$ pe O X, se descrie un cerc care tae urma orizontală a planului în urma orizontală a dreptei căutate; două soluţiuni. **20.** Fie H şi V urmele dreptei. Se construeşte triunghiul dreptunghic $v\,v'k$ având una din catete egală cu $v'v$ şi unghiul opus φ. Se descrie pe $h\,v$ ca diametru un cerc şi se ia intersecţia m a acestui cerc cu cercul descris din v cu o rază egală cu cealaltă catetă a triungiului construit. Dreapta $h\,m$ e urma orizontală a planului; două soluţii.

XIV. **1.** Se va determina planul A B C şi se va rabate triunghiul, pe planul orizontal, în $A_1\,B_1\,C_1$. Se va construi cercul $A_1\,B_1\,C_1$ şi se vor determina apoi punctele principale, după metoda obişnuită. **2.** Se va rabate planul A B C D pe planul orizontal şi se va construi în rabatere cercul tangent la dreptele $B_1\,C_1$ şi $B_1\,D_1$ şi trecând prin A_1. **3.** Urma orizontală a planului e perpendiculara dusă din A pe direcţia axei mici. Linia de pantă care se proectează orizontal după axa mică este iarăşi cunoscută în rabaterea pe planul orizontal în jurul acestei proecţiuni. Se va deduce urma orizontală a planului, ridicând punctul liniei de pantă situat în planul vertical. **4.** Proecţiunea orizontală a cercului celor nouă puncte este elipsa celor 9 puncte care trece prin mijloacele laturilor triunghiului $a\,b\,c$ şi prin picioarele cevienelor cari sunt proiecţiunile înălţimilor triunghiului A B C. Se va întrebuinţa metoda rabaterii. **5.** Se va rabate planul şi se va descrie cercul de rază dată tangent urmelor rabatute.

XV. (Planşa VI) 1. 1° (Fig. 1) Se poate proceda luându-se intersecţiile planului cu feţele prizmei. Determinăm o bază superioară secţionând cu un plan orizontal H, care intersectează planul P P′ după orizontala K φ. Pentru a determina intersecţia cu faţa $a\,e$, luăm intersecţia m_2 a dreptei $a\,e$ cu urma planului P P′, şi în acelaş timp intersecţia m_1 a laturei corespunzătoare din baza superioară cu orizontala K φ; dreapta $m_1\,m_2$ tae faţa după segmentul $\alpha\,\varepsilon$. Metodă analoagă pentru segmentul $\beta\,\gamma$; pentru a obţine punctul δ e suficient a uni p_1 cu ε. 2° Pentru a obţine adevărata mărime a secţiunei se va rabate planul P P′ pe planul orizontal şi se vor utiliza punctele m_2, n_2 etc., de pe urma planului. 3°. Pentru desfăşurare, se va face o schimbare de plan vertical, luându-se ca plan vertical un plan paralel cu muchile prizmei. Se va face o secţiune dreaptă în prismă, care se va rabate pe planul orizontal în adevărată mărime după $\lambda\,\mu\,\nu\,\rho\,\tau$. Lungimile porţiunilor $a\,\alpha$, $b\,\beta$ etc., sunt date în adevărată mărime pe noul plan vertical. 2. 1° (Fig.2) Se poate întrebuinţa metoda schimbărei de plan vertical. Se va lua ca nou plan vertical un plan perpendicular pe P σ P′. Punctele de intersecţie cu muchile piramidei se obţin imediat în $\alpha_1'\,\beta_1'\,\gamma_1'$ şi δ_1'; se va reveni la vechiul sistem de proecţiune. Ca verificare, dreptele $a\,b$ şi $\alpha\,\beta$, $b\,c$ şi $\beta\,\gamma$ etc., trebue să se întâlnească pe urma planului P σ P′. 2° Pentru adevărata mărime a secţiunei se va rabate planul P σ P′ pe planul orizontal, cu ajutorul proecţiunei verticale $\alpha_1'\,\beta_1'\,\gamma_1'\,\delta_1'$; ca verificare dreptele $\alpha_3\,\beta_3$, $\beta_3\,\gamma_3$ etc., trebue să treacă respectiv prin l, n etc. 3° Pentru adevărata mărime a segmentelor S α, S β etc., se vor face rotaţii în S α, S β, etc., până ce ele devin paralele cu noul plan vertical. Se vor construi succesiv triunghiurile S $\alpha\,\beta$, S $\beta\,\gamma$, etc., cu ajutorul laturilor care sunt acum toate cunoscute. 3. Planul dat tae paralelipipedul după un paralelogram care se obţine imediat în proecţie verticală ridicând pe muchi punctele de intersecţie ale urmei orizontale a planului cu urmele orizontale ale muchilor. Se va rabate acest paralelogram pe planul vertical şi se va înscrie între laturile paralelogramului rabatut un segment de lungime dată; se va ridica apoi direcţia obţinută. Două soluţii în general. 4. Se vor determina întâi intersecţiile tetraedului cu dreapta, cu ajutorul unuia din planele de proecţiune ale dreptei. Se va desfăşura apoi tetraedul şi se vor uni punctele de intersecţie, după desfăşurare, printr'o linie dreaptă; acest lucru putându-se face în două moduri, pe tetraedru se va alege dintre acestea, seg-

mentul cel mai scurt. 5. Pe muchile triedrului de la vârf S; se iau trei lungimi egale S A, S B, S C. Prin punctul dat se va duce un plan paralel cu A B C; 4 soluţii. 6. Se vor lua mijloacele a două muchii opuse şi se va duce planul paralel cu O X care trece prin aceste puncte; 3 soluţii. 7. Fie A B C D un tetraedru. Dacă ducem un plan P oarecare paralel cu dreptele A C şi C D, care tae faţa A C D după segmentul $\alpha\beta \parallel C D$ iar faţa B C D după $\gamma\delta \parallel C D$, figura $\alpha\beta\gamma\delta$ e un paralelogram. Pentru a rezolva problema noastră, vom lua pe $\beta\gamma$ o lungime $\beta\lambda = \alpha\beta$ şi vom determina intersecţia M a dreptei A λ cu BD. Planul dus prin M paralel cu planul P, răspunde problemei. 8. Se va duce un plan perpendicular pe o dreaptă bisectoare a triedrului. 9. Se va lua un punct arbitrar M pe dreapta care uneşte vârful piramidei cu punctul de întâlnire al diagonalelor bazei. Se va duce prin acest punct două segmente cari să se reazeme fiecare pe două muchi opuse şi care să aibă mijlocul în M. Aceste două segmente determină planul căutat. 10. Se va desfăşura de două ori consecutiv suprafaţa laterală a paralelipipedului, începând cu o faţă care conţine vârful dat şi se va duce dreapta care uneşte vârfurile extreme, inferior şi superior.

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

14. Să se afle timpul în care o stea de declinație δ stă d'asupra orizontului unui loc de latitudine H.

15. O stea răsare la ora $13^{ore}.11^{min}.27^{sec}.3$ (timp sideral) și ajunge la ora $4^{ore}.5^{min}.8^{sec},9$ într'un loc de latitudine:

$$H = 42^{0}.13'.56''.$$

Se cere: 1°. Coordonatele ecuatoriale ale stelei, 2°. Înălțimea stelei la ora $17^{ore}.3^{min}.7^{sec},8$.

16. O steà a cărei declinație este 15° trece la meridianul unui loc de 35° latitudine la ora 2 timp sideral.
Se cere să se afle ora siderală la care apune acea stea.

17 La ora siderală:

$$T = 6^{ore}.15^{min}.11^{sec},3$$

s'a observat în primul vertical o stea de coordonate ecuatoriale:

$$\alpha = 7^{ore}.58^{min}.17^{sec},6, \quad \delta = 45^{0}.50'.7'',0.$$

Se cere latitudinea locului H.

18. Două stele de declinațiuni cunoscute δ, δ' sunt văzute la un moment dat într'un același plan vertical la distanțe zenitale ζ, ζ'. Se cere latitudinea locului de observație.

19. La un moment dat s'a observat înălțimea:

$$h = 44^{0}.53'.44'',1$$

a unei stele de declinațiune:

$$\delta = 22^{0}.7'.39'',3$$

Se cere să se găsească latitudinea locului de observație știind că unghiul orar al stelei a fost:

$$t = 46^{0}.10'.15'',2$$

20. Prin două stele de coordonate ecuatoriale date (α, δ) (α', δ'), se duce un cerc mare și se cere;

4°). Ascensiunea dreaptă Ω a intersecțiilor (nodurilor) acestui cerc cu ecuatorul.

2°). Inclinarea i a planului acestui cerc pe planul ecutatorului.

Aplicație:

$$\alpha = 19^{ore}.53^{min}.17^{sec}, \quad \delta = -13^{0}.24'.37''.$$

$$\alpha' = 5^{ore}.28^{min}.16^{sec}, \quad \delta' = +11^{0}.59'.41''.$$

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

II. TRANSFORMAREA COORDONATELOR

1. O steà are următoarele coordonate ecuatoriale:

$$\alpha = 14^{ore}.\ 10^{min}.\ 13^{sec},97, \quad \delta = 19^{0}.\ 48'.\ 21'',7.$$

Se cere să se găsească azimutul şi distanţa zenitală la 18 ore siderale, într'un punct de latitudine:

$$H = 46^{0}.\ 34'.\ 55''.$$

2. Intr'un loc de latitudine:

$$H = 38^{0}.\ 58'.\ 53''.$$

s'a observat o steà şi s'a găsit la teodolit:

$$z = 69^{0}.\ 42'.\ 30'', \quad A = 300^{0}.\ 10'.\ 30''$$

Se cere să se găsească distanţa polară P şi unghiul orar t.

3. La un moment dat (1 Ian. 1851) steaua α din constelaţiunea *Caprei* a avut următoarele coordonate ecuatoriale:

$$\alpha = 5^{ore}.\ 5^{min}.\ 42^{sec},03, \quad \delta = 45^{0}.\ 50'.\ 22'',4$$

Se cere coordonatele ecliptice ale stelei λ (longitudine) şi β (latitudine), ştiind că înclinarea eclipticei pe ecuator este:

$$\omega = 23^{0}.\ 27.'\ 25'',47$$

4. Coordonatele ecuatoriale, ale stelei α din *Carul mic* au fost la un moment dat:

$$\alpha = 1^{ora}.\ 16^{min}, \quad \delta = 88^{0}.\ 41'$$

Se cere să se vază ce vor deveni aceste coordonate peste 200 de ani, — socotiţi dela acel moment, în virtutea precessiunii echinoxilor.

5. Să se stabilească formulele care dau timpul cât stă o steà d'asupra orizontului unui loc de latitudine dată H, când se cunosc:

1°) Coordonatele azimutale ale stelei (A, ζ).

2°) Coordonatele ecliptice ale stelei (λ, β).

III. REFRACTIA ATMOSFERICA

1. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui *Laplace*:

$$\rho = 60'',61\ tg\ \zeta - 0'',057\ tg^{3}\ \zeta,$$

distanța zenitală adevărata a stelei, pe care s'a citit cu teodolitul distanța zenitală :

$$\zeta = 71^{\circ}.\ 41'.\ 10''.$$

2. In aceleași condițiuni de presiune s'a măsurat distanțele zenitale ζ, ζ' aparente ale unei aceleiași stele respectiv la temperaturile de 0° C și 10° C. Se cere raportul dintre corecțiile de refracție corespunzătoare.

3. Să se găsească distanța zenitală adevărată, corespunzătoare distanței aparente :

$$\zeta = 71^{\circ}.\ 41'.\ 10'',$$

presupunând că observația fost făcută la -5° C temperatură și la $770^{m}/_{m}$ presiune atmosferică.

4. O stea S are la un moment dat distanța sa zenitală aparentă ζ de două ori mai mare ca distanța zenitală aparentă ζ' a unei alte stele S'. Se cere să se găsească relația dintre corecțiile de refracție corespunzătoare, utilizând formula:

$$\rho = K\, tg\, \zeta, \quad K = 60'', 6.$$

5. Intr'un acelaș loc depe Pământ s'a măsurat înălțimile h, h' a două stele S, S' d'asupra orizontului și diferența azimuturilor lor A—A'. Se cere să se găsească sub ce unghiu Δ se vede din centrul pământului distanța dintre ele, ținând seamă de refracția atmosferică în cazul când avem :

$$h = 27^{\circ}.\ 35'.\ 0'', \quad h' = 36^{\circ}.\ 6'\ 31'', 67, \quad A—A' = 13^{\circ}.\ 15'.\ 0''.$$

IV. GEOGRAFIE SI COORDONATE GEOGRAFICE

1. Presupunând pământul sferic, să se calculeze în metri lungimea arcului de $2^{\circ}.\ 41'.\ 24''$ pe paralelul a cărui latitudine este: $49^{\circ}.\ 11'.\ 14''$, știind că raza pământului este 6366 km.

2. Pe un paralel de latitudine necunoscută H s'a găsit că distanța între două localități A, B este 261 km. Să se găsească latitudinea acestui paralel, știind că longitudinile punctelor A și B. sunt respectiv :

$$L_A = 43^{\circ}.\ 17', \quad L_B = 46^{\circ}.\ 41'.$$

Raza pământului presupus sferic este R = 6366 km.

3. Fiind dată raza pământului R şi coordonatele geografice (L, H), (L', H') a două puncte depe pământ, se cere să se găsească distanţa dintre aceste puncte.

4. Pe punţile a două nâvi se găsesc doi observatori, fie care la înălţimea de 3 m. d'asupra mării; ei încetează de a se mai vedeà când distanţa între ei ajunge 12600 metri. Să se calculeze raza pământului.

5. Se admite că tropicele sunt la 23°. 27'. 30" dela ecuator şi că fie-care cerc polar este depărtat de polul corespunzător cu acelaş număr de grade. Luând ca unitate suprafaţa pământului, se cere să se calculeze ariile fie-căreia din cele 5 zone.

6. Un aeroplan planează la 3710 m. d'asupra orizontului. Se cere să se calculeze la un moment dat:

1°) Depresiunea orizontului.

2°) Aria zonei vizibile.

7. Să se dea formulele care ne arată cum trebue să înfigem la Bucureşti, un jalon în pământ pentru ca el să fie îndreptat spre Tokio.

8. Cunoscând timpul în care o aceiaşi stea de declinaţiune δ, stă d'asupra orizontului a două puncte date A, B şi latitudinea punctului A, să se găsească latitudinea punctului B.

9. Orele locale simultanee în două staţiuni sunt respectiv T şi T'. Se cere să se afle diferenţa de longitudine a celor două staţii în grade.

Aplicaţie: $T = 12^{ore}$, $T' = 3^{ore}$.

10, Raza pământului fiind egală cu R = 6.378.393. m. şi latitudinea unei localităţi fiind: H = 45°. 11'. 22", se cere să se calculeze drumul pe care trebue să-l parcurgă un om spre răsărit plecând din aceà localitate, pentru ca să sosească într'un punct a cărui oră să întreacă cu 1" ora localităţii.

11. Două puncte A, B, sunt situate pe acelaş paralel pământesc la depărtare de 100 km. Ştiind că ora din B e cu 4' înaintea orei din A se cere să se găsească latitudinea comună a celor două puncte.

12. In Septembrie 1521 *Sebastian del Cano* a intrat în portul *San Lucar*, pe care îl părăsise cu trei ani înainte, după ce a făcut ocolul pământului mergând mereu spre Vest. In acea zi el socoteà că este 5 Sept. Se cere să se găsească data exactă a acestui eveniment.

13. Intr'un punct al pământului a cărui latitudine este:

$$H = 38^0.\ 58'.\ 53''$$

și a cărui longitudine Est în raport cu meridianul Parisului este:

$$L = 48^0.\ 51'.\ 15''$$

s'a observat o stea cu cordonatele ecuatoriale:

$$\alpha = 79^0.\ 30',\quad \delta = 8^0.\ 31'.\ 46'',56$$

Știind că în momentul observațiunii, pendula siderală, regulată după meridianul Parisului arată:

$$T = 22^{ore}.\ 22^{min}.\ 16^{sec},\ 76$$

se cere distanța zenițală ζ și azimutul stelei A în acel moment.

14. Coordonatele terestre ale orașului *Moscova* fiind:

$$L' = 35^0.\ 17'.\ 30'',\quad H' = 55^0.\ 45'.\ 13''$$

se cere azimutul Moscovei pe orizontul Parisului, știind că avem la Paris:

$$L = 0,\quad H = 48^0,\ 50',\ 52''$$

15. Să se găsească distanța în Km. dintre orașele *Moscova* și *Paris* admițând că un cerc mare pământesc are 40.000 Km. lungime și având în vedere datele problemii precedente.

16. In două puncte A, B situate pe același meridian care au latitudinile H și H' s'a măsurat distanțele zenitale ζ și ζ' ale unei stele în momentul culminațiilor ei. Să se calculeze unghiul φ sub care un observator presupus așezat în centrul stelei vede coarda AB.

17. Se cere raportul ρ dintre lungimea pendulului care bate secunda în două puncte A, B care au respectiv latitudinile:

$$H_A = 30^0,\quad H_B = 60^0$$

18. Observarea cu teodolitul a unei stele de coordonate ecuatoriale:

$$\alpha = 8^{ore}.\ 33^{min}.\ 25^{sec},\quad \delta = 58^0.\ 34'.\ 48''$$

la ora siderală $T = 5^{ore}.\ 28^{min}.\ 15^{sec}$, a dat pentru distanța zenitală

$$\zeta = 33^0.\ 36'.\ 15'',3$$

și o cetire pe cercul azimutal:

$$A = 205^0.\ 53'.\ 21'',2$$

Să se găsească, în aceste condiţiuni direcţia meridianei φ şi latitudinea locului H.

19. La 1 Aprilie 1880, într'un loc de latitudine:

$$H = 48^{\circ}.\ 50'$$

s'a măsurat diferenţa de azimut A—A' între steaua δ din *Carul mic* şi o miră M. Se cere să se găsească azimutul mirei A', cunoscând coordonatele ecuatoriale ale stelei:

$$\alpha = 18^{ore}.\ 10^{min}.\ 55^{sec},14, \quad \delta = 3^{\circ}.\ 23'.\ 47'',6$$

20*. Pământul fiind un elipsoid de revoluţie turtit de semi-axe

$$a = 6.377.398,^{m}04, \quad b = 6.356.079,^{m}84$$

să se găsească latitudinea geocentrică a unui punct a cărei latitudine geografică este:

$$H = 48^{\circ}.\ 50'.\ 13''.$$

V. HARTI SI NAVIGATIE

1. Să se calculeze raza ρ unui paralel de latitudine dată H în proecţie ortografică şi în proiecţie stereografică pe ecuator, luând lungimea razei ecuatoriale ca unitate.

2. Să se calculeze axa mică $2a$ a unui meridian de longitudine dată L în proecţiune ortografică pe un meridian de raza R.

3. Să se calculeze raza ρ a unui paralel de latitudine dată H şi raza ρ' a unui meridian de longitudine dată L în proecţiune stereografică pe un meridian de rază R.

4. Să se calculeze în proecţiune stereografică pe un plan diametral de rază R paralel la orizontul unui loc de latitudine dată H:

1°. Distanţa dintre polii hărţii δ.

2°. Raza ρ a unui meridian de longitudine dată L' şi raza ρ' a unui paralel de latitudine dată H'.

5*. In proecţiune omolografică sistem *Babinet* pe un cerc de rază R se cere să se calculeze axa mică $2a$, a unui meridian de longitudine dată L, şi distanţa δ dela ecuator a unui paralel de latitudine dată H.

6*. In proecţiune globulară să se calculeze razele ρ şi ρ' ale

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

meridianului și paralelului orașului București, cunoscând coordonatele geografice:

$$L = 1^{ora}.35^{min}.4^{sec},2. \quad H = 44^{0}.28'.38''$$

luând unitatea ca rază pentru meridianul principal.

7*. Se construește o hartă *Mercator* pe scara 1 cm = 1 grad. Să se figureze pe această hartă orașul București dând în cm. coordonatele sale rectangulare x, y în raport cu ecuatorul și meridianul principal.

8*. Se presupune că un navigator nu știe în ce poziție se află pe mare, însă el poate cu ajutorul unui cronometru să aibă în fiecare moment timpul sideral al Parisului T_p și să măsoare cu ajutorul unui sextant înălțimea $h = \left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right)$ a unei stele ale cărei coordonate ecuatoriale (α, δ) le cunoaște din «*Connaissance des temps*». Se cere să se determine coordonatele geografice ale locului și să se însemneze pe o hartă poziținea pe care o poate ocupa nava în momentul observării.

Aplicație: Cu datele α, δ, ζ și T_p dela problema No. 18 Cap. IV să se determine coordonatele rectangulare x, y ale pozițiunilor navei pe o hartă sistem *Cassini* construită pe scara 1 cm.=1 grad, axele de coordonate fiind meridianul principal și ecuatorul.

9*. Cunoscând coordonatele geografice (L. H), (L′, H′) a două puncte date A, B se cere să se găsească *unghiul de drum* V al unei nави care merge din A la B pe o *loxodromie*[1]).

Aplicație pentru orașele *Brest* și *New-York* știind că avem:

$$L = 353^{0}.10', \quad H = 40^{0}.37' \text{ (Brest)}$$

$$L' = 283^{0}.4', \quad H' = 49^{0}.7' \text{ (New-York)}$$

10. La un moment dat o navă care a parcurs un arc de loxodromie s cu un unghiu de drum V plecând din A se oprește într'un punct B. Se cere să se găsească coordonatele geografice ale punctului de oprire.

Aplicație pentru cazul când coordonatele punctului A sunt:

$$L = 353^{0}.10', \quad H = 40^{0}.37',$$

și când avem:

$$s = 2985 \text{ mile}, \quad V = 79^{0}\,28'$$

---

1) *Loxodromia* e o curbă care taie meridianele sub un unghiu constant V care se numește *unghiu de drum*.

VI. ROTAȚIA PĂMÂNTULUI

1. Să se calculeze viteza de rotație a unui punct depe ecuatorul terestru, cunoscând raza pământului R = 6.378.393 m.

2. Presupunând pământul sferic, să se arate că raportul dintre forța centrifugă la ecuator și greutate, este aproximativ definit de formula:

$$\tau = \frac{1}{17^2}.$$

3. Fie g și g' respectiv accelerațiile greutății la ecuator și pe un paralel de latitudine dată H. Să se arate că în ipoteza rotației sferei terestre avem:

$$g' = g(1 + 0{,}00344\ sin^2 H).$$

Ce greutate are la pol un corp care cântărește la ecuator 1 kgr.?

4. Din cauza rotațiunii pământului, un corp care cade liber din A atinge pământul într'un punct B′ la răsărit de piciorul B al verticalei punctului A. Să se calculeze deviația orientală B B′ neglijând rezistența aerului, cunoscând latitudinea locului H. și înălțimea de cădere h = A B.

5. Să se demonstreze că viteza unghiulară a mișcării planului de oscilație a unui pendul, este proporțională cu sinusul latitudinei locului.

VII. SOARELE

1. Să se găsească în timp mediu astronomic ora care corespunde orei 5^{ore}, 49^{min}. dim. în timp civil mediu din 24 Ianuarie 1914.

2. Să se găsească în timp civil mediu, ora ce corespunde la 22^{ore}, 54^{min} timp mediu astronomic din 17 Martie 1914.

3. Se cere timpul mediu al unei observațiuni făcute la 9 Noembre 1910 la ora 3^{ore}. 40^{min}. 59^{sec}, 8 (timp adevărat) într'un punct de longitudine 8^{ore}. 15^{min}. 55^{sec}, 8 la vest de Paris.

Se știe din «*Connaissance des temps*» că ora medie la amiază-adevărată la Paris este: 23^{ore}. 43^{min}. 52^{sec}, 78 și că variațiunea orară la 1 oră timp adevărat este: -0^{sec}. 193. (9 Noembre 1910).

4. Se cere timpul adevărat al unei observațiuni făcute la 9 Noembre 1910 la ora $7^{ore}.32^{min}.53^{sec},62$ (timp mediu) într'un punct de longitudine $4^{ore}.26^{min}.9^{sec},10$ la vest de Paris.

Se știe din «*Connaissance des temps*» că timpul adevărat la amiază medie la Paris este $0^{ore}.16^{min}.7^{sec},17$ și că variațiunea sa în 24 ore dela 9 la 10 Noembre este: $-5^{sec},05$.

5. La un moment dat Soarele are declinația sa australă egală cu: $17^{0}.8'.53''$. Se cere să se găsească diferența dintre timpul mijlociu și timpul adevărat (ecuația timpului E), cunoscând înclinarea eclipticei pe ecuator $\omega = 23^{0}.27'.23'',7$.

6. O persoană stă la amiazi pe malul mării la o înălțime h d'asupra nivelului apei și măsoară înălțimile h_1, h_2 ale unui nor și ale umbrii norului pe apă într'un moment în care Soarele e la spatele observatorului la o înălțime dată: $\frac{\pi}{2} - \zeta$. Se cere să se calculeze înălțimea la care se află norul d'asupra nivelului mării.

7. In două zile ale anului s'a măsurat coordonatele ecuatoriale ale Soarelui și sa găsit:

$$\delta = 4^{0}.38'\ 6'',1, \quad \delta' = 22^{0}.5'.24'',7,$$

$$\alpha - \alpha' = 3^{ore}.54^{min}.8^{sec},38.$$

Se cere să se calculeze înclinarea eclipticei ω.

8. Intr'un loc de latitudine:

$$H = 46^{0}.31'.25'',6.$$

s'a observat înălțimea centrului Soarelui:

$$h = 37^{0}.22'.49'',3.$$

Știind că declinațiunea centrului Soarelui în acea zi a fost: $\delta = +10^{0}.17'.58'',9$, se cere ora adevărată (solară) a momentului de observație.

9. Să se determine azimutul centrului Soarelui la $3^{ore}.10^{min}$ timp civil mediu, cu următoarele date:

$$H = 45^{0}.11'.12'', \quad \delta = -17^{0}.8'.53'',$$

știind că ecuația timpului este $E = 18^{min}.48^{sec}$.

10. Declinațiunea Soarelui fiind egală cu: $18^{0}.27'.16''$ să se calculeze distanța zenitală a acestui astru la ora 6 timp adevărat la Paris, știind că latitudinea Parisului este: $48^{0}.59'.13''$.

11. Cunoscând înclinarea eclipticei pe ecuator:

$$\omega = 23^{\circ}.27'.32'',935$$

se cere să se vază între ce limite variază înălțimea Soarelui la amiazi adevărat în cursul unui an în punctul a cărei latitudine este: $H = 40^{\circ}$.

12. Într'un punct de latitudine $H = 43^{\circ}.18'.17'',5$ s'a determinat înălțimea centrului Soarelui la $2^{ore}.57'^{min}.4^{sec},6$ timp mediu la Paris și s'a găsit:

$$h = 42^{\circ}.26'.13'',4.$$

Sa se găsească longitudinea punctului de observație știind că ecuația timpului este $E = -0^{ore}.3^{min}.48^{sec},08$ și că declinațiunea Soarelui a fost:

$$\delta = 18^{\circ}.15'.27'',5.$$

13. Cunoscând longitudinea Soarelui $\lambda = 322^{\circ}.44'.28'',3$ și înclinarea eclipticei pe ecuator: $\omega = 23^{\circ}.27'.23'',57$, să se calculeze coordonatele ecuatoriale ale Soarelui.

14. Dacă (α, δ), (α', δ'), (α'', δ'') sunt coordonatele ecuatoriale ale Soarelui în trei momente date să se arate că avem:

$$\Sigma \operatorname{tg} \delta \sin(\alpha'' - \alpha) = 0.$$

15. Fiind dată înălțimea h a unui turn, latitudinea locului H și declinația δ a Soarelui, se cere să se găsească lungimea l a umbrei la amiază. Aplicație: $h = 35$ m. $H = 36^{\circ}.43'$, $\delta = -16^{\circ}.23'$.

16. Să se găsească locul extremității umbrei gnomonului într'o zi dată, într'un loc dat pe un plan dat. În ce caz locul se reduce la un cerc?

17. Să se calculeze grosimea x a atmosferei terestre știind că zorile și amurgul încep sau sfârșesc în momentul când soarele este la 18° sub orizont.

18. Să se calculeze într'un loc de latitudine dată H durata zorilor în ziua când declinația medie a Soarelui este δ.

19. Declinația Soarelui într'o zi fiind $20^{\circ}.30'$, să se găsească calota pământească situată cu totul în întuneric în acea zi.

20. Să se găsească longitudinea λ a Soarelui în ziua când într'un loc de latitudine dată H, zorile încep la m ore după sfârșitul amurgului. Care este locul punctelor depe pământ pentru care putem avea $m = 0$; înclinarea eclipticei pe ecuator este:

$$\omega = 23^{0}.\,27'.\,15''.$$

21. La ce oră răsare Soarele la București în ziua când umbra cea mai scurtă aruncată de construcții este egală cu jumătate din înălțimea lor? Care este durata corespunzătoare a zorilor? Latitudinea Bucureștilor este: $H = 44^{0}.\,25'.\,39''$.
Se va admite că declinația Soarelui este constantă în tot cursul zilei și că ecuația timpului este nulă.

22. La ora siderală $T = 6^{ore}.\,0^{min}.\,0^{sec}$ s'a observat cu teodolitul într'un loc oarecare distanța zenitală ζ a Soarelui în ziua când umbra minima aruncată pe pământ de construcțiuni a fost egală cu înălțimea lor. Cunoscând înclinarea eclipticei pe ecuator $\omega = 23^{0}.\,27'$ se cere:

1°) Să se găsească latitudinea locului.

2°) Să se afle zona depe pământ pentru care fenomenul este posibil.

23. Intr'o zi o stea de declinație dată δ stă d'asupra orizontului unui loc care are 18° latitudine boreală, un timp egal cu durata zilei inclusiv zorile și amurgul. Se cere:

1°). Limitele între care poate fi cuprins δ pentru ca fenomenul să fie posibil.

2°). Durata zorilor în cazul când avem $\delta = +36^{0}$.

3°). Ascensiunea dreaptă a Soarelui în aceă zi.

Se va admite că zorile și amurgul încep și sfârșesc în momentul când Soarele este la 18° sub orizont și se va luă pentru înclinarea eclipticei pe ecuator, $\omega = 23^{0}.\,27'$.

24. Să se calculeze, în timp adevărat și în timp mediu, ora apusului centrului Soarelui în punctul de latitudine $H = 48^{0}.\,50'.\,11'$ în ziua solstițiului de vară când $\delta = 23^{0}.\,27'.\,18'', 7$.

In ziua solstițiului timpul mediu la amiazi adevărat este $0^{ore}.\,1^{min}.\,27^{sec}, 21$ iar a două zi: $0^{ore}.\,1^{min}.\,40^{sec}, 33$.

25. Să se calculeze ora apusului Soarelui în locul cu latitudinea:

$$H = 50^{0}.\,38'.\,44''.$$

știind că în aceă zi și în ziua următoare la amiazi adevărat avem respectiv:

$$\delta = 15^{0}.\,31'.\,34'' \qquad E = 5^{min}.\ 8^{sec}, 1$$

$$\delta' = 15^{0}.\,14'.\,53'' \qquad E' = 4^{min}.\,58^{sec}, 7$$

VIII. LEGILE LUI KEPLER, MISCAREA ELIPTICA

1. Ştiind că durata revoluţiunii pământului este de 365, 256 zile, şi că aceia a lui Marte este de 686. 979 zile, să se calculeze distanţa medie a lui Marte la Soare, luând ca unitate distanţa medie a pământului la Soare.

2. Distanţa medie a pământului la Soare fiind luată ca unitate, aceia a lui Jupiter la Soare este 5,2; să se calculeze cu ajutorul legilor lui *Kepler* durata revoluţiunei lui Jupiter.

3. Să se calculeze semi-axa mare a orbitei lui Mercur ştiind că durata revoluţiunii lui Mercur în jurul Soarelui este de 88 zile medii.

4. Să se calculeze intervalul de timp care se scurge între două opoziţii consecutive ale planetei care se află la distanţa 2,56, dela Soare, admiţând că pământul şi planeta descriu uniform două cercuri situate în acelaş plan. (Planeta Amfitrita).

5. Cunoscând semi axele a, b ale orbitei pe care o descrie o planetă împrejurul Soarelui, să se calculeze oscilaţiunea vitezei planetei în cursul unui an.

6. Să se găsească relaţia care există între distanţele medii a_1, a_2 a două planete la Soare şi vitesele lor unghiulare ω_1, ω_2. (mişcare circulară).

7. Cunoscând distanţele lui Jupiter şi ale Pământului la Soare (a_0, a_1) să se calculeze unghiurile care măsoară oscilaţiunile proecţiunii lui Jupiter pe sfera cerească (mişcare circulară). Se va lua $a_0 = 5{,}2$, $a_1 = 1$.

8. Cunoscând distanţele a_0, a_1 ale planetelor Venus şi Pământ la Soare, să se calculeze digresiunea lui Venus (orbite circulare în planul orbitei terestre).

9. Să se arate că legea III-a lui *Kepler* se poate enunţă în modul următor: Ariile descrise de razele vectoare ale planetelor în unitatea de timp, sunt proporţionale cu rădăcinile pătrate ale parametrilor orbitelor.

10. La un moment dat, anomalia adevărată a Soarelui, în mişcarea sa aparentă în jurul pământului este egală cu:

$$80^{\circ}.\ 10'.\ 57'',\ 6.$$

Se cere să se calculeze: raza vectoare r, anomalia excentrică

u și anomalia medie ξ, corespunzătoare acelui moment. Se va luà pentru semi-axa mare a și pentru excentricitatea orbitei solare:

$$a = 1, \quad e = 0{,}0167701$$

11. Cunoscând excentricitatea $e = 0{,}01677$ a unei planete să se calculeze valorile u și v ale anomaliei excentrice și ale anomaliei adevărate, care corespund la anomalia medie: $\xi = 150^{\circ}.0'.0''$.

12. Durata revoluțiunii planetei Pallas în jurul Soarelui este de 1689,058 zile. Să se calculeze timpul care se scurge dela trecerea planetei la perielie, până în momentul când raza sa vectoară este perpendiculară pe axa mare. Excentricitatea orbitei este:

$$e = 0{,}2408186.$$

13. Se dă semi-axa mare a a orbitei unei planete și excentricitatea sa e. Să se calculeze raza vectoare r și anomalia adevărată v care corespunde la o anomalie excentrică u.

Aplicație pentru planeta Marte:

$$u = 248^{\circ}.26'.18'',4,$$

$$a = 1{,}5236013,$$

$$e = 0{,}0932611.$$

14*. Să se stabilească formula:

$$T_m = \frac{24\,(\alpha_p - \alpha_s)}{24 + (\mu' - \mu)},$$

care dă ora solară medie a trecerii la meridianul Parisului a unei planete oare care.

α_p și α_s sunt ascensiunile drepte ale planetei și ale Soarelui mijlociu la amiaza medie care precede trecerea planetei la meridian, exprimate în ore. μ și μ' variațiunile lui α_p și α_s în 24 de ore, exprimate în ore.

Se va presupune că mișcarea în ascensiune dreaptă a planete e uniformă.

15*. $\mathcal{L}$ și $\mathfrak{V}$ fiind coordonatele heliocentrice ale unei planete și λ, β coordonatele geocentrice corespunzătoare, să se stabilească formulele:

$$tg\,\lambda = \frac{tg\,\mathcal{L} + k\,\dfrac{\sin \lambda_s}{\cos \mathfrak{V} \cos \mathcal{L}}}{1 + k\,\dfrac{\cos \lambda_s}{\cos \mathfrak{V} \cos \mathcal{L}}}, \qquad tg\,\beta = \frac{tg\,\mathfrak{V}\,\dfrac{\cos \lambda}{\cos \mathcal{L}}}{1 + k\,\dfrac{\cos \lambda_s}{\cos \mathfrak{V} \cos \mathcal{L}}},$$

în care λ_s este longitudinea geocentrică a Soarelui şi k raportul distanţelor R şi r ale planetei la Soare şi la pământ.

16*. Intr'un moment dat planeta Saturn a avut următoarele coordonate heliocentrice:

$$\mathfrak{L} = 180^\circ.\,29'.\,1'',4, \quad \mathfrak{B} = +2^\circ.\,18'.\,20'',9 \quad \log R = 0{,}97783,$$

coordonatele geocentrice adevărate ale Soarelui fiind:

$$\lambda_s = 102^\circ.\,53'.\,52'',87. \quad \beta_s = 0, \quad \log r = 0{,}00722.$$

Să se calculeze coordonatele geocentrice ale lui Saturn în acel moment.

17*. Cunoscând longitudinea v a unei planete în orbita sa, înclinarea i a orbitei şi longitudinea nodului ascendent Ω să se calculeze coordonatele eliocentrice ale planetei, cu următoarele date:

$$v = 178^\circ.\,19'.\,13'',4,$$

$$i = 7^\circ.\,6'.\,56'',7,$$

$$\Omega = 235^\circ.\,42'.\,8'',1.$$

18*. O cometă descrie în jurul Soarelui o orbită parabolică a cărei distanţă perielică este egală cu axa mare a orbitei terestre. Să se calculeze în zile mijlocii timpul t necesar pentru ca anomalia adevărată a cometei să treacă dela valoarea 0° la valoarea $60^\circ.\,38'.\,24'',7$.

19. In ziua de 11/24 Mai 1910 cometa *Halley* a trecut la perielie. Cunoscând semi-axa mare $a = 17{,}9$ distanţe medii dela pământ la Soare şi excentricitatea orbitei $e = 0{,}962$ se cere să se găsească vitesa de care a fost animată cometa în acest moment pe orbita sa. Distanţa medie a pământului la Soare este:

149.501.000 km.

20. Să se calculeze maximul stirbiturii ε ale unei planete superioare (orbite circulare) luând raza planetei ca unitate. Aplicaţie pentru planeta Marte.

IX. LUNA.

1. In anul 1850,0, elementele planului orbitei lunare au fost:

$$i = 5^\circ.\,8'.\,47'',9.$$

$$\Omega = 146^\circ.\,13'.\,40''.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ținând seama de variațiunile acestor elemente, se cere să se găsească valoarea lor în Ianuarie anul 1900.0.

2. Să se găsească relația dintre oblicitatea i a orbitei lunare pe ecliptică și dintre înclinările ω, ω' ale eclipticei și ale orbitei lunare pe ecuator cunoscând longitudinea nodului excendent Ω. Să se deducă de aci limitele între care variază ω' știind că oblicitatea i variază între $5^0, 9'$ și $-5^0.9'$. Se va lua $\omega = 23^0.27'$.

3. Să se arate că dacă însemnăm cu T_p durata revoluției siderale a pământului și cu T_l durata revoluției siderale a lunii, revoluția sinodică corespunzătoare S e definită de relația :

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_l} - \frac{1}{T_p}.$$

3. Știind că unul din nodurile orbitei lunare descrie ecliptica în 6793,39 zile, să se calculeze durata revoluției sinodice a nodurilor.

5. Fie φ distanța unghiulară dintre lună și soare și δ semidiametrul aparent al lunii. Să se arate că lărgimea părții luminate și vizibile este :

$$\delta(1 - \cos\varphi).$$

6. Cunoscând la un moment dat paralaxa orizontală ecuatorială a lunii :

$$P = 57', 2,$$

și înălțimea centrului lunii d'asupra orizontului : $h = 35^0.20'$ se cere să se găsească înălțimea adevărată a acestui centru, ținând seama de refracția atmosferică și admițând că pământul este sferic.

7. Ținându-se seama de turtirea pământului τ, se demonstrează în Astronomie că paralaxa orizontală a lunei P pentru un loc de latitudine H este dată de ecuația :

$$P = P'(1 - \tau \sin^2 H)$$

în care P' este paralaxa orizontală ecuatorială care e dată pentru fie care moment în Eferemide. Să se găsească expresia lui P la București, luând turtirea $\tau = \frac{1}{300}$.

8. Cunoscând coordonatele ecliptice ale lunei λ, β longitudinea Ω a nodului ascendent al orbitei lunare și înclinarea ecuatorului lunei i pe ecliptică, să se calculeze librațiunea în latitudine a lunei.

Aplicaţie : $i = 1^{0}.\,31'.\,22''1$, $\Omega = 65^{0}.\,38'.\,2'',8$.

$\lambda = 197^{0}.\,27'.\,18'',1$, $\beta = 3^{0}.\,57'.\,28,8$.

9. Având în vedere datele problemii precedente şi cunoscând că longitudinea medie λ_m corespunzătoare a lunei a fost :

$$\lambda_m = 190^{0}.\,5'.\,29'',0,$$

se cere să se calculeze libraţia în longitudine respectivă.

10. In două puncte A, B situate pe un acelaş meridian la latitudini H şi H' s'a măsurat distanţele zenitale ζ şi ζ' ale lunii în momentul culminaţiunii sale. Sub ce unghiuri x, x' vede un observator aşezat în centrul lunii razele pământeşti T A, T B. Să se deducă de aci paralaxa orizontală a lunii.

X. CALENDARE [1])

1. Să se arate că anul 9 înainte de Cristos a fost bisextil.

2. Să se arate că anii 10 înaintea lui Cristos şi 7999 după Cristos au acelaş ciclu solar 28. (calendarul lulian).

3. Ştiind că perioada juliană începe la anul 4713. a. C., se întreabă la ce an al perioadei juliene corespunde anul 4963 a. C.

4. Să se găsească litera duminicală a anului julian 1863.

5. Să se găsească litera duminicală a anului julian bisextil 1900.

6. Era lui *Nabonassar* a început la 26 Februarie 747 a. C. Se cere numele acestei zile.

7. *Cristofor Columb*, a zărit pământul Americei pentru prima oară în Vinerea doua a lunei Octombre 1492 Să se găsească data descoperirei americei (Calendarul julian).

8. In ce zi s'a sărbătorit Paştele în anul 546 ? (Calendarul julian).

9. Să se fixeze data şi durata celor patru sezoane ale anului 12000 în calendarul julian.

10. Să se găsească litera duminicală a anului gregorian 1863.

11. Calendarul Gregorian a început să se întrebuinţeze la 15 Octombre 1582. Să se găsească numele acestei zile.

---

1) Pentru problemele de Calendare se poate utiliza cu folos broşura anuală : *Annuaire du bureau des longitudes*, sau : *Hémérologie des calendriers* par *Ulysse Bouchet*.

12. Care este data în calendarul gregorian, a sărbătorii Paștelui din anul 1712?

13. Să se găsească zilele în care încep cele 4 sezoane în anul 12000 în Calendarul gregorian.

14. In ce zi a săptămânii începe anul evreesc 5817?

15. Să se găsească ziua săptămânii care corespunde datei:

7 Schaaban 1262,

din calendarul musulman.

16. Să se găsească la ce dată în stil nou corespunde data de Vineri 5 Octombrie stil vechiu 1582, plecând dela diferența actuală dintre calendare.

17. Cronologiștii de azi fixează data eșirei Evreilor din Egipt la 5 Aprilie stil vechiu 1645 b. C; în cărțile lui *Moise* însă se arată acest eveniment la 15 Nissan. Se cere să se vază dacă aceste două date sunt compatibile.

18. Să se găsească în calendarul musulman data corespunzătoare zilei de Vineri 16 Iulie st. v. 622.

19. Mareșalul *Pélissier*, în raportul său asupra luării Sebastopolului spune că la 8 Septembrie 1855, armatele franco-engleze au atacat orașul. Se cere data acestui eveniment în actele oficiale ruseșți.

20. Contractul unei căsătorii evreești e iscălit cu data: a 4 a zi a săptămânii, a 5-a zi a lunei Hesvan, anul 5579 de la facerea lumii. Se cere data gregoriană corespunzătoare.

21. Se cere să se calculeze pentru calendarul Iulian care este cea mai mică și cea mai mare depărtare între sărbătoarea Paștelui dintre un an și anul următor.

22. Să se găsească numărul de aur, epactul și vârsta lunii în ziua de 21 Mai 1693 stil nou.

23. Să se găsească cît timp a luminat luna la Paris în noaptea de 21 Mai 1603 și să se arate ora răsăritului lunii, știind că în acea zi, soarele a răsărit la $T = 4^{ore} . 27^{min}$ dim.

24. In ce zi a lunei Iulie 1769 am avut lună nouă? (Calendar gregorian).

25. Să se găsească în calendarul julian expresiunea generală a anilor în care luna Februarie are 5 duminici.

XI. ECLIPSE.

1. Cunoscând razele soarelui şi ale Lunii ρ, ρ' precum şi distanţa d dintre centrele acestor astre, să se calculeze distanţa dela centrul Lunii la cercul de contact al conului de umbră.

2. Centrele S, L, T ale Soarelui, Lunii şi, Pământului sunt în linie dreaptă. Raza terestră fiind luată ca unitate, raza soarelui este 108,27 iar raza lunii 0,27. Distanţa L T = 58 şi L S = 23000: 1°) Să se calculeze lungimea L 0 a conului de umbră al Lunii. 2°) Să se găsească fracţiunea f din suprafaţa pământului din interiorul conului de umbră.

2 Fie P şi P' paralaxele Soarelui şi Lunei în momentul unei opoziţii, δ şi δ' semi diametrele aparente şi Δ cea mai mică distanţă unghiulară a centrului Lunii la dreapta T S, care uneşte centrul Soarelui cu centrul Pământului. Să se arate că pentru a avea o eclipsă de lună trebue să avem:

$$\Delta < P' + P + \delta' - \delta \quad \text{(Eclipsă parţială).}$$

$$\Delta < P' + P - \delta' - \delta \quad \text{(Eclipsă totală).}$$

4. In cazul când Luna e în conjuncţie, pentru a avea o eclipsă de Soare, trebue să avem (notaţiile problemei precedente):

$$\Delta < P' - P + \delta + \delta'.$$

Pentru ca eclipsa să fie centrală, e necesar să avem şi neegalitatea:

$$\Delta < P' - P.$$

5. Să se calculeze orele primului şi celui d'al doilea contact al Lunii cu conul de umbră pură în timpul eclipsei parţiale de lună care a avut loc în următoarele condiţii:

Timp mediu la Paris în momentul opoziţiei:	$T_0 = 8^{ore}.25^{min}.1^{sec}$.
Ascensiunea dreaptă a lunii.	$\alpha = 10^{ore}.45^{min}20^{sec}.15$
Declinaţia lunei.	$\delta_l = 7°.16'.18^{sec},2.$
Declinaţiunea soarelui.	$\delta_s = -7°.54'.21'',1.$
Paralaxa orizontală ecuatorială a Lunii.	$P_l = 61'.15'',4.$
Paralaxa orizontală ecuatorială a Soarelui.	$P_s = 8'',9$
Semidiametrul adevărat al Lunii.	$D = 16'.41'',7.$
Semi diametrul adevărat al Soarelui.	$D' = 16'.8'',3.$

Semi diametrul aparent al conului de umbră este :

$$\frac{51}{50}(P_l - P_s - D').$$

Variațiunile orare ale Lunii și Soarelui au fost respectiv :

$$\Delta\alpha_l = \quad 34'.\ 2'',1 \quad \Delta\alpha_s = \ 2'.\ 20''.6.$$
$$\Delta\delta_l = -17'.30'',7 \quad \Delta\delta_s = 56''\ 7.$$

XII. ATRACȚIA UNIVERSALĂ.

1. Cunoscând raza pământului presupus sferic R = 6366 km. și densitatea sa în raport cu apa $\gamma = 5{,}5$ să se calculeze masa pământului m.

2. Cunoscând masa soarelui și a pământului :

$$M = 324.479 \times m, \quad m = 6175 \times 10^{20} \frac{\text{kgr. sec}^2}{\text{metru}}$$

să sa calculeze acțiunea mutuală de atracțiune a acestor două corpuri cerești la distanța D = 149.501.000 km.

3. Să se calculeze forța cu care atrage Luna apa mării, (maree lunare) cunoscând masa lunii $m' = \frac{m}{80}$, raza pământului R = 6366 km., și distanța dela pământ la lună $d = 384.486$ km.

4. Admițând că orbitele a două planete de mase date m_1, m_2 sunt cercuri cu centrul în soare, se cere să se găsească expresiunea vitezei uneia din planete, cunoscând viteza celei-l-alte pe orbita ei și forțele de atracțiune newtoniene corespunzătoare.

5. Să se arate că oscilația maximă a forței vii a unei planete în mișcarea ei de revoluție împrejurul Soarelui, este proporțională cu expresiunea :

$$\frac{pe}{1+e}$$

unde $2p$ este parametrul și e excentricitatea orbitei.

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

BCU IAS/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

RASPUNSURI ŞI INDICAŢIUNI

I

1. Se va înmulţi ascensiunea dreaptă cu 15: $4^{ore} \times 15 = 60^{\circ}.0'.0''$, $20^{min} \times 15 = 5^{\circ}.0'.0''$, $3^{sec} \times 15 = 0^{\circ}.0'.45''$, şi se va aduna. 2. Se obţine timpul sideral căutat, împărţind ascensiunea dreaptă cu 15. $51^{\circ} : 15 = 3^{ore}.24^{min}.0^{sec}$, $24' : 15 = 0^{ore}.1^{min}.36^{sec}$. Adunând găsim: $T = 3^{ore}.25^{min}.36^{sec}$, 00. 3. Se găseşte în mod analog $T = 7^{ore}.14^{min}.34^{sec}$, 85. 4. Avem: $t = T - \alpha$. 5. Diferenţa căutată este 30°. 6. Avem: $\delta = \zeta_m + H$. 7. Trebue ca declinaţiunea stelei să fie boreală, egală sau superioară unghiului de $44^{\circ}.43'.24''$. 8. Se găseşte pentru trecerea superioară: $\zeta_s = 35^{\circ}.34'.22''$, şi pentru trecerea inferioară: $\zeta_i = 55^{\circ}.34'.22''$. 9. Din relaţiunea: $h = 90^{\circ} + H - \delta$, se obţine: $h = 72^{\circ}.1'.24''$. 10. Se calculează înălţimea h a stelei cu relaţiunea: $h = 90^{\circ} - \zeta = 28^{\circ}.11'.28''$, 2, şi se aplică formulele de trigonometrie sferică în triunghiul P Z S (fig. 1): $tg\, M = -\frac{tg\, h}{\cos A}$, $tg\, t = \frac{tg\, A \cos M}{\sin (H - M)}$, $T = t + \alpha$. Obţinem: $M = 148^{\circ}.26'.1''.5$; $t = 25^{\circ}.50'.37''.97$; $T = 7^{ore}.6^{min}.36^{sec}.53$.

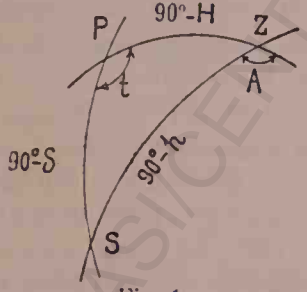


Fig. 1.

11. Din triunghiul Z P S, (zenit, pol, stea) cu semiperimetrul p deducem unghiul orar, cu ajutorul formulei:

$$tg\, \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(p - \frac{\pi}{2} + H\right) \sin\left(p - \frac{\pi}{2} + \delta\right)}{\sin p \sin (p - \zeta)}}.$$

Rezultat: $t = 78^{\circ}.23'.43''$, 35. 12. Se calculează ora siderală

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

T cu ajutorul unghiului orar t, definit de formula: $tg \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-P)\sin\left(p-\frac{\pi}{2}+H\right)}{\sin p \sin(p-\zeta)}}$, care se deduce din triunghiul sferic P Z S, şi cu ajutorul relaţiei: $T = t + \alpha$. Obţinem: $T = 8^{ore}.50^{min}.57^{sec},96$. **13.** Din triunghiul Z P S, obţinem: $tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(p-\frac{\pi}{2}+H\right)\sin(p-\zeta)}{\sin p \sin\left(p-\frac{\pi}{2}+\delta\right)}}$. Rezultat: $A = 86^{\circ}.6'.11'',2$.

14. Arcul zilei $2x$ este dat de formula: $\cos x = -tg\,H.tg\,\delta$, iar timpul cât stă steaua d'asupra orizontului este: $y = \frac{2}{15}\arccos(-tg\,H.tg\,\delta)$, dacă se exprimă y în ore siderale şi arcele în grade. **15.** Steaua stă d'asupra orizontului un timp sideral dat de diferenţa: $y = 28^{ore}.5^{min}.8^{sec},9 - 13^{ore}.11^{min}.27^{sec},3$, astfel că semi-arcul zilei x (unghiul orar al stelei t la răsăritul ei) este: $x = t = \frac{28^{ore}.5^{min}.8^{sec},9 - 13^{ore}.11^{min}.27^{sec},3}{2} = -111^{\circ}.42'.42''$. Cu ajutorul formulei: $\alpha = T - t$ (probl. 4), aplicată la ora răsăritului obţinem: $\alpha = 20^{ore}.38^{min}.18^{sec},1$. De asemenea din relaţiunea: $\cos t = -tg\,\delta\,tp\,H$, căpătăm: $\delta = 22^{\circ}.10'.19''$. Înălţimea stelei h se calculează din triunghiul Z P S în care cunoaştem două laturi şi unghiul coprins: $ZP = 90^{\circ} - H$, $PS = 90^{\circ} - \delta$, $ZPS = 7^{ore}.26^{min}.50^{sec},8 - (17^{ore}.3^{min}.7^{sec},8 - 13^{ore}.11^{min}.27^{sec},3) = 53^{\circ}.47'.34'',5$. Cu ajutorul formulelor din trigonometria sferică se găseşte: $h = 41^{\circ}.11'.59'',7$. **16.** Arcul diurn $2x$ e dat de formula: $\cos x = -tg\,H\,tg\,\delta$. Se găseşte: $x = 6^{ore}.43^{min}.15^{sec},34$. Steaua apune deci la $T = 8^{ore}.43^{min}.15^{sec},34$ timp sideral. **17.** Unghiul orar al stelei se obţine din relaţia: $t = T - \alpha$ (probl. 4) iar latitudinea locului rezultă imediat din formula lui *Mauduit*: $\cos t.\,cotg\,\delta = cotg\,H$, dedusă din triunghiul sferic Z P S dreptunghiu în Z. Rezultat: $H = 48^{\circ}.49'.34'',7$. **18.** Dacă S, S′ sunt poziţiunile

stelelor, triunghiurile P Z S şi P Z S' (fig. 2) dau imediat : $\sin H = \frac{\sin\delta\sin\zeta' - \sin\delta'\sin\zeta}{\sin(\zeta' - \zeta)}$

19. Din triunghiul Z P S deducem : $\sin h = \sin H \sin\delta + \cos H \cos\delta \cos t$. Înlocuind şi rezolvând obţinem : $H_1 = 12^\circ.0'.10''$. $H_2 = 48^\circ.50'.10''$. 20. Din triunghiurile dreptunghii S N α, S' N α' (fig. 3) deducem : $tg\,\delta = tg\,i \sin(\Omega - \alpha)$,

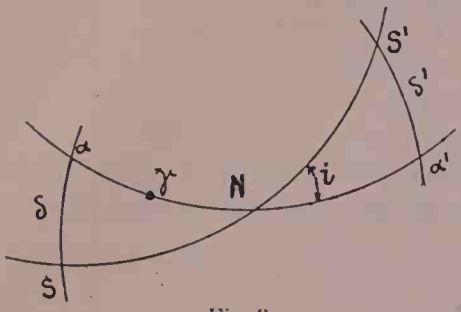


Fig. 3.

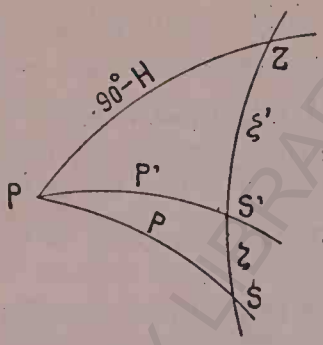


Fig. 2.

$tg\,\delta' = tg\,i \sin(\alpha' - \Omega)$ Eliminând i obţinem : $\frac{tg\,\delta}{tg\,\delta'} = \frac{\sin(\Omega - \alpha)}{\sin(\alpha' - \Omega)}$. Înclinarea i este apoi determinată. Se găseşte : $\Omega_1 = 6^{ore}.36^{min}.27^{sec},31$; $\Omega_2 = 18^{ore}.36^{min}.27^{sec}.31$, $i = 35^\circ.54'.54''.9$.

II

1. Se aplică formulele de transformare : $t = T - \alpha$, $tg\,M = \frac{1}{tg\,\delta\cos t}$, $tg\,A = \frac{tg\,t\cos M}{\sin(H - M)}$, $tg\,\zeta = \frac{tg(H - M)}{\cos A}$. Rezultatul este: $M = 79^\circ.3'$. $A = 28^\circ.59'$, $\zeta = 35^\circ.35'$. 2. Se aplică formulele de transformare : $tg\,M = -\frac{\cotg\zeta}{\cos A}$, $tg\,t = \frac{tg\,A\cos M}{\sin(H - M)}$; $tg\,P = \frac{tg(M - H)}{\cos t}$. Se găseşte: $M = -36^\circ.20'.18''$, $t = 304^\circ.55'.23''27$, $P = 98^\circ.31'.46'',57$. 3. Se aplică formulele de transformare : $tg\,M = \frac{tg\,\delta}{\sin\alpha}$, $tg\,\lambda = \frac{tg\,\alpha\cos(M - \omega)}{\cos M}$, $tg\,\beta = \sin\lambda\, tg(M - \omega)$. Rezultatul este : $\lambda = 79^\circ.46'.40'',94$, $\beta = 22^\circ.51'.48'',1$. 4. Se calculează, mai întâi cu ajutorul formulelor dela problema precedentă longitudinea şi latitudinea stelei : $\lambda = 86^\circ.55'.37''$, $\beta = 66^\circ.5'.26'',6$. In urmă se determină longitudinea λ' a stelei peste 200 de ani : $\lambda' = \lambda + \frac{360^\circ \times 200}{25800} = 89^\circ.43'.3''$, şi se trece dela coordonatele ecliptice

(λ', β) la coordonatele ecuatoriale (α', δ') cu ajutorul formulelor de transformare: $tg\,M = \frac{tg\,\beta}{\sin\lambda'}$, $tg\,\alpha' = \frac{tg\,\lambda'\cos(M+\omega)}{\cos M}$, $tg\,\delta' = \sin\alpha' tg(M+\omega)$. Rezultat: $\alpha' = 5^{ore}.3^{min}.59^{sec}$, $\delta' = 89°.31'.36''$. 5. Se găsește în primul caz: $\cos 2x = -\cos M tg H cotg M cotg A cosec(H-M)$. unghiul M fiind dat de relația: $tg(H-M) = tg\,\zeta \cos A$. In cazul al doilea obținem: $\cos 2x = -\frac{\sin M\, tg\,\lambda\, tg\, H}{\sqrt{\cos^2(M-\omega) + tg^2\lambda\cos^2 M}}$, unghiul M fiind deiinit de ecuația: $tg(M-\omega) = \frac{tg\,\beta}{\sin\lambda}$.

III

1. Făcând calculul găsim: $\rho = 2'.54'',4$ și deci: $\zeta_a = 71°.44'.4'',4$. 2. Dacă ρ_0 și ρ_{10} sunt corecțiile de refracție respectiv la 0° și 10°, avem: $\rho_{10} = \frac{1}{(1+m\,10°)(1+n.10°)}\rho_0$, unde $m = 0{,}003655$, $n = 0{,}000180$ Rezultat: $\rho_{10} = \frac{\rho^0.}{1{,}038}$. 3. Factorul barometric η este dat de formula: $\eta = \frac{770}{760} = 1{,}013$, iar factorul termometric ε e definit de relația: $\varepsilon = \frac{1}{(1+m\,t°)(1+n\,t°)} = 1{,}019$. Rezultat: $\zeta_a = 71°.43'.17'',1$ 4. Rezultat: $\rho = \frac{2k^2\rho'}{k^2 - \rho'^2}$. 5. Se calculează mai întâi înălțimile adevărate și se găsește: $h_a = 27°.33'.4'',001$, $h' = 36°.5'.6'',188$. In urmă din triunghiul sferic ZSS' în care se cunoaște laturile ZS, ZS' și unghiul $Z = A - A'$ se obține: $\Delta = 14°.6'.14'',75$.

IV

1. Raza paralelului de latitudine H este: R cos H dacă R=6366 km. este raza pământului. Lungimea arcului de $\alpha°$ este $s = \frac{\pi R\cos H.\alpha°}{180°}$ Rezultat: 195.350 metri. 2. Cu aceleași notații ca în problema precedentă, găsim: $\alpha'' = 3°.24'$ și deci $H = 46°.18'$. 3. Fie T

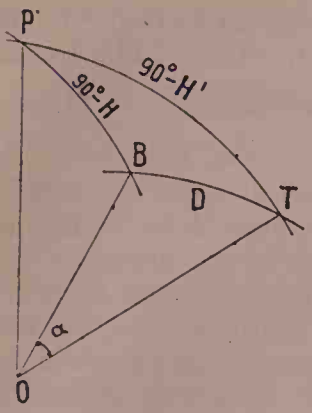


Fig. 4.

şi B punctele date (fig. 4) şi O centrul pământului. Unghiul $T\,O\,B = \alpha$ este dat de formula: $\cos\alpha = \sin H \sin H' + \cos H \cos H' \cos(L - L')$. Distanţa D dintre localităţile A şi B măsurată pe un arc de cerc mare este: $D = \frac{\pi R \alpha^0}{180^0}$.

4. In general dacă D este distanţa dintre observatori şi h înălţimea lor d'asupra mării avem: $D^2 = 4h(h + 2R)$. Rezultat: 6615 Km. 5. Dacă $A = 4\pi R^2$ este suprafaţa globului terestru şi dacă notăm cu φ latitudinile tropicilor putem scrie: Aria zonei toride $A_t = 4\pi R^2 \sin\varphi$. Aria zonei temperate $A_{t'} = 2\pi R^2(\cos\varphi - \sin\varphi)$. Aria zonei îngheţate $A_i = 4\pi R^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$. Făcând calculele se găseşte respectiv: $\frac{A_t}{A} = 0{,}40$, $\frac{A_{t'}}{A} = 0.26$, $\frac{A_i}{A} = 0.04$. 6. Depresiunea orizontului ψ e dată de formula: $\cos\psi = \frac{R}{R+h}$, h fiind înălţimea aeroplanului, iar aria zonei vizibile este dată de relaţia: $A = 2\pi R^2(1 - \cos\psi)$. Rezultat: $\psi = 1^0.57'$. $A = 147.612$ km.^{2} p. 7. Se determină unghiul $\alpha = T\,O\,B$ (fig. 4) dintre Bucureşti şi Tokio, cu ajutorul formulei dela problema 3 IV In urmă se calculează unghiul μ al meridianei Bucureştilor cu direcţia T B prin ajutorul relaţiei: $\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(p - \frac{\pi}{2} + H\right)\sin\alpha}{\sin p \sin\left(p - \frac{\pi}{2} + H'\right)}}$, unde: $2p = \pi + \alpha - (H + H')$. Unghiul jalonului cu verticala este: $90^0 + \frac{\alpha^0}{2}$, iar unghiul planului vertical al jalonului cu meridiana loculi este μ. Ţinând apoi seama de faptul că avem: $H = 44^0.\,24'.\,35''$ Nord $L = 1^{ora}.\,35^{min}.\,6^{sec}$, 1 Est Bucureşti. $H' = 35^0.\,39'.\,18''$ Nord. $L' = 9^{ore}.\,9^{min}.\,37^{sec}$ Est Tokio, se poate calcula rezultatul numeric. 8. Se găseşte: $\operatorname{tg} H' = \frac{\cos x'}{\cos x}\operatorname{tg} H$, x şi x' fiind semi-arcele diurne

ale stelei în punctele A şi B. **9.** Avem $\Delta L = 15(T-T')$ în cazul particular al problemei obţinem $\Delta L = 45^{\circ}$. **10.** Trebue să percurgem pe paralel $\left(\frac{15}{3600}\right)$ grade sau 326,9 metri. **11.** Răspuns: 25°.50'.30". **12.** *Sebastian del Cano*, a pierdut o zi. Data exactă este 6 Septembrie. **13.** Se calculează ora siderală a locului T = ora siderală a Parisului + longitudinea locului, şi se deduce apoi unghiul orar al stelei: $t = T - \alpha = 304^{\circ}.55'.26''$, 4. Cu ajutorul formulelor dela problema 1 II se obţine: A=286°.32'.37",1. $\zeta = 57^{\circ}.45'.50''$, 8. **14.** Din triunghiul format de meridianul Parisului ZP, meridianul Moscovei M P şi distanţa sferică a acestor două oraşe (fig. 5) căpătăm unghiul A cu formulele: $tg\ M = \frac{tg\ H'}{\cos L'}$, $tg\ A = \frac{tg\ L' \cos M}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - H + M\right)}$. Rezultat: A=58°.38'.39",91. **15.** Cu ajutorul formulelor dela problema 3. IV se găseşte D = 2486,527 km. **16.** Avem: $\varphi = (H' - H) - (\zeta + \zeta')$.

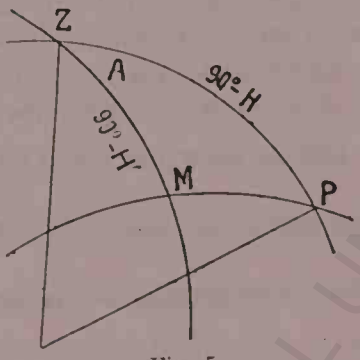


Fig. 5.

17. Lungimea pendulului simplu care bate secunda este: $l = 0^{m}.99361 - 0^{m}.002626 \cos 2\lambda$ Se găseşte $\rho = 0{,}997$. **18.** Se aplică formulele: $t = T - \alpha = -46^{\circ}.17'.30''$, $\sin a = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin\zeta}$, $\operatorname{cotg}\frac{H}{2} = -\frac{tg\frac{\zeta - \frac{\pi}{2} + \delta}{2} \cos\frac{a-t}{2}}{\cos\frac{a+t}{2}}$

Rezultat: H = 41°.9'.42". Direcţiunea meridianei corespunde pe cercul azimutal la cetirea: $A - a = -17^{\circ}.1'.24''$, 8 ($a$ fiind unghiul azimutal al stelei). **19.** Ora siderală a localităţii este: $5^{ore}.20^{min}.59^{sec} + 105^{\circ}.30'.15'' = 185^{\circ}.45'$, iar unghiul orar t este: $-86^{\circ}.58'.47''$. Rezultat: 244°.41'.14",32. **20.** Latitudinea geocentrică H_0 e dată de formula: $tg\ H_0 = \frac{b^2}{a^2} tg\ H$. Se găseşte: $H_0 = 48^{\circ}.38'.48''$, 2.

V

1. In proecţie ortografică $\rho = \cos H$; în proecţie stereografică: $\rho = \frac{\cos H}{1+\sin H}$. 2. Răspuns $a = R\cos H$. 3. Se găseşte: $\rho = \frac{R}{2\sin H}$, $\rho' = \frac{R}{2} tg\left(\frac{\pi}{2} - H\right)$. 4. Avem: $\delta = R\left(tg\frac{H}{2} + \operatorname{cotg}\frac{H}{2}\right)$ $\rho = R\frac{tg\frac{H}{2} + \operatorname{cotg}\frac{H}{2}}{2\sin L'}$, $\rho' = R\left[\operatorname{cotg}\frac{H+H'}{2} - \operatorname{cotg}\frac{H-H'}{2}\right]$. 5. Avem: $a = R\frac{L^0}{180_0}$, $\delta = R\sin x$, x fiind un arc definit de ecuaţia transcendentă: $2x + \sin 2x = \pi \sin H$. (Proecţiunea omolografică sistem *Babinet* se bazează pe echivalenţa ariilor). 6. Proecţiunea globulară diferă de proecţiune stereografică prin acea că cercurile meridiane şi cercurile paralele sunt egal depărtate. In general avem: $\rho = \frac{\pi^2 + 4L^2}{4\pi L}$ $\rho' = \frac{\pi^2\cos^2 H + (\pi\sin H - 2H)^2}{2\pi(\pi\sin H - 2H)}$. In cazul problemei găsim: $\rho \overset{\sim}{=} 2{,}0$, $\rho' \overset{\sim}{=} 1{,}2$. 7. Latitudinea (datele problemii precedente) crescută este: $\Phi = \log_{nep} tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{H}{2}\right) = 48^0.07'.49''$, iar coordonatele căutate sunt: $x = 23{,}7^{cm}$, $y = 48{,}1^{cm}$. 8. Ora la bord T_b, longitudinea L şi latitudinea H se calculează cu formulele: $L = T_b - T_p$, $T_b = t + \alpha$, şi cu relaţiunile de trigonometrie sferică, care există între cantităţile δ, ζ şi H. Cu datele: $T_p = 22^{ore}.22^{min}.16^{sec}$, 76. $\delta = 8^0.31'.46''$, 56, $\alpha = 79^0.30'$, $\zeta = 57^0.45'.50''$, 8. se obţine: $H = 38^0.58'.53''$, $L = 48^0.51'.15''$. Rezultat $x = 48{,}8$ cm., $y = 38{,}9$ cm. 9. Unghiul de drum V e definit de formula: $L - L' = tg\,V\left(\log_{nep} tg\frac{H'}{2} - \log_{nep} tg\frac{H}{2}\right)$. Dacă întrebuinţăm logaritmii zecimali, pentru a exprimă în minute de cerc membrul al doilea trebue să înmulţim prin 7915',7. Rezultat: $V = 79^0.50' \backsim = 80^0$. 10. Intrebuinţăm formulele: $s\cos V = H - H'$, $L' - L = -tg\,V\left(\log_{nep} tg\frac{H'}{2} - \log_{nep} tg\frac{H}{2}\right)$. Ştiind că 1 minut = 1 milă se găseşte: $L' = 283^0.4'$, $H' = 49^0.7'$.

VI

1. Viteza unghiulară este $\omega = \frac{2\pi}{86400}$ $\frac{\text{radianti}}{\text{sec}}$ iar viteza de rotaţie v este: 463,84 $\frac{m}{\text{sec}}$. 2. Raportul căutat este: $\frac{\omega^2 R}{g} = 0.00344 \sim \frac{1}{17^2}$. 3. Se deduce rezultatul din formula: $g' - g = \omega^2 R \sin^2 H$. La pol un corp de 1 kgr. cântăreşte 1,005 kgr. 4. Viteza de rotaţie a punctului B este: $\omega R \cos H$, iar viteza punctului A este: $\omega (R + h) \cos H$. Deviaţia B B' este deci: $BB' = \omega h \cos H \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

5. Dacă V este viteza de rotaţie a pământului şi v viteza de deplasare a meridianei în raport cu urma orizontală a planului de oscilaţie a unui pendul avem: $v = V \sin H$.

VII

1. Răspuns: $17^{ore}.49^{min}$ din 23 Ianuarie 1914. 2. Răspuns: $10^{ore}.54^{min}$ dimineaţa, 18 Martie 1914. 3. Timpul adevărat la Paris este: $3^{ore}.40^{min}.59^{sec}, 8 + 8^{ore}.15^{min}.55^{sec}, 8 = 11^{ore}.56^{min}.55^{sec}, 6$. Adunăm ora medie la amiazi — adevărat la Paris, cu timpul adevărat dat şi cu produsul care se obţine din multiplicarea variaţiunei orare cu ora adevărată a Parisului corespunzătoare momentului observării. Obţinem: $3^{ore}.40^{min}.59^{sec}, 8 + 23^{ore}.43^{min}.52^{sec}, 78 + 0^{ore}.193 \times 11^{ore}.56^{min}.55^{sec}, 6 = 3^{ore}.24^{min}.54^{sec}, 89$. 4. Răspuns $7^{ore}.48^{min}.58^{sec}, 27$. 5. Se aplică formula: $E = \frac{1}{30} \sin (\lambda - 280^{\circ},23) \frac{1}{23,2} \sin 2\lambda$, după ce s'a calculat longitudinea λ a Soarelui din relaţiile: $\cos \omega . tg \lambda = tg \alpha$, $tg \delta = \sin \alpha \, tg \omega$. Rezultatul: $E = 18^{min}.48^{sec}$ şi s'a obţinut în sec. după multiplicarea cu factorul 206265. 6. Răspuns: $h \frac{\cos \zeta}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\zeta - \alpha)}$ Se va observă că dreapta care uneşte norul cu umbra sa este paralelă la raza vizuală dusă dela observator la Soare. 7. Se determină α' din ecuaţia: $\frac{tg \frac{\alpha + \alpha'}{2}}{tg \frac{\alpha - \alpha'}{2}} = \frac{\sin (\delta + \delta')}{\sin (\delta' - \delta)}$, şi unghiul ω din

relaţia : $tg\,\omega = \frac{tg\,\delta'}{\sin\alpha'}$. Rezultat 23°. 27′. 13″. 8. Aplicăm formula : $tg\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(p - \frac{\pi}{2} + \delta\right)\sin\left(p - \frac{\pi}{2} + H\right)}{\sin p \sin(p - \zeta)}}$. Rezultat : $t = 45°.9'.32'' = 3^{ore}.0^{min}.38^{sec}$ timp adevărat. 9. Se găseşte timpul adevărat : $t = 2^{ore}.56^{min}.12^{sec} - 0^{ore}.13^{min}.48^{sec} = 44°.0'.3''$. Rezultat : A = 43°. 42′. 32″, 4. 10. Triunghiul Zenit, Pol, Soare, este dreptunghic în Pol. Aplic formula : $\cos\zeta = \sin H \sin\delta$, şi găsesc : $\zeta = 76°.10'.51''$, 5. 11. Declinaţia variază între $-\omega$ şi $+\omega$. In primul caz o limită e dată de formula : $h = \frac{\pi}{2} - \omega - H$, iar în cel d'al doilea de formula : $h = \frac{\pi}{2} + \omega - H$. Rezultat : 26°. 31′. 27″, 065 ; 73°. 27′ 32″, 935. 12. Se calculeaaă unghiul orar t (timpul adevărat al localităţii) cu formula dela problema 8.VI Se găseşte : $t = 48°.16'.50''$. Longitudinea este $L = t$ — timpul adevărat la Paris = 3°.3′.40″. 13. Rezultat : $\alpha = 21^{ore}.40^{min}22^{sec},2$, $\delta = -13°.58'.41''$, 5. 14. Se obţine relaţia căutată dacă ne servim de identităţile : $tg\,\delta = \sin\alpha\,tg\,\omega$, $tg\,\delta' = \sin\alpha'\,tg\,\omega$, $tg\,\delta'' = \sin\alpha''\,tg\,\omega$. 15. Avem : $l = h\,tg\,\zeta_m$ şi deci $l = h\,\cot g\,(\delta + H)$. In cazul particular se obţine $l = 94^m.43$. 16. Utilizând formulele : $\rho = h\,tg\,\zeta$. $\cos\zeta = \sin\delta \sin H + \cos\delta \cos H \cos t$, se găseşte că locul căutat e o conică. Această curbă se reduce la un cerc dacă se ia umbra gnomonului la pol. 17. Avem : $x = 2R\frac{\sin^2 4°.30'}{\cos 9°} = 79{,}3$ km. 18. Rezultat : Semiarcul diurn al zilei inclusiv zorile şi amurgul e definit de ecuaţia : $\cos y = -tg\,H\,tg\,\delta - \frac{\sin 18°}{\cos\delta\cos H}$. Scăzând durata zilei obţinem rezultatul. 19. Rezultat : Calota căutată este de 20°. 30′. 20. Ecuaţiile problemei sunt : $tg\,\lambda = \frac{tg\,\delta}{\sqrt{tg^2\omega - tg^2\delta}}$, $\sin\delta \sin H + \sin 18° = \cos\frac{15}{2}m \cos\delta \cos H$. Zona pentru care $m = 0$ este închisă de paralelele de latitudine $\pm 51°, 7'$. 21. Declinaţiunea Soarelui este : $\delta = 19°.00'.27''$. Semi arcul diurn este : $\cos x = -0{,}34449 \times 0{,}98022 = -0{,}33768$. Durata zilei : $14^{ore}.37^{min}.26^{sec}$. Semiarcul zilei inclusiv zorile este dat de relaţia : $\cos y = -0{,}33768 -$

$\frac{0,30902}{0,94147 \times 0,71462} = -0,79506$. Durata zorilor: $2^{ore}.12^{min}.28^{sec}$ Conform enunciului se poate spune că Soarele răsare la ora $4^{ore}\,41^{min}.17^{sec}$ dim. (timp civil mediu). **22.** In triunghiul dreptunghic zenit, pol. soare avem: $\cos z = \sin H \sin \delta$, iar din datele problemii rezultă: $\delta = \frac{\pi}{4} - H$. Latitudinea e dată de ecuaţia: $\cos \zeta = \sin H \sin\left(\frac{\pi}{4} - H\right)$. Zona pentru care fenomenul e posibil e definită de dubla neegalitate $21^{o}.33 < H < 68^{o}.27'$. **23.** Dacă δ' e declinaţia soarelui avem: $\delta' = -\frac{\pi}{2} + 2\delta$ şi deci $33^{o}.16'.30'' < \delta < 56^{o}.43'.30''$. Se găseşte: Durata zorilor: aproximativ 30', iar ascensiunea dreaptă $\alpha = 13^{ore}.46^{min}$. **24.** Ora adevărată T' a apusului soarelui se obţine cu formula $\cos x = -tg\delta tgH$. Se găseşte: $T' = 7^{ore}.59^{min}.0^{sec},72$ timp adevărat. Ecuaţia timpului la ora apusului este: $E_1 = E + (E' - E)\frac{7^{ore}.59^{min}\,0^{sec}.72}{24^{ore}} = 0^{ore}.1^{min}.31^{sec},57$ Timpul mediu căutat este: $T = 8^{ore}.0^{min}.32^{sec},29$. **25.** Căutăm ora apusului Soarelui T_1 in ipoteza că declinaţia δ rămâne constantă în cursul zilei, calculăm apoi valoarea declinaţiunii δ_1 la această oră, prin interpolare. In fine cu valoarea găsită calculăm ora adevărată T a apusului cu ajutorul formulei: $\cos x = -tgHtg\delta$ Se găseşte: $T_1 = 7^{ore}.19^{min}12^{sec}422$ $\delta_1 = 15^{o}.26'.28'',49$. $T = 7^{ore}.18^{min}.44^{sec}$ timp adevărat. Ecuaţia timpului la această oră este: $E_1 = E + (E' - E)\frac{26324}{86400} = 5^{min}.5^{sec},24$ Ora apusului în timp mijlociu este: $7^{ore}.23^{min}.49^{sec},24$.

VIII

1. Insemnăm cu a semi axa mare a orbitei planetare şi T durata unei revoluţiuni complecte. Din formula: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} = k$ obţinem: 1,5237. **2.** Răspuns: 11,8578 ani. **3.** Răspuns: 0,387. **4.** Chestiunea se reduce la determinarea duratei revoluţiei sinodice σ a planetei Marte. Avem: $\sigma = \frac{T_p T}{T - T_p}$ unde T_p şi T sunt respectiv revoluţiile siderale ale pământului şi ale planetei: Rezultat: 1,323 ani. **5.** Viteza V a unei planete pe orbita ei e dată de ecuaţia: $V^2 = \mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]$, unde r este raza vectoare şi μ

o constantă egală cu 0,0002959. Răspuns: $\sqrt{\mu}\left(\sqrt{\frac{2}{b}-\frac{1}{a}}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$.

6. Răspuns: $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}=\frac{a_2^3}{a_1^3}$. 7. Dacă φ este unghiul căutat avem: $a_1=a_0\sin\frac{\varphi}{2}$. Rezultat $\varphi=22^0.10$ sau: $180^0-\varphi=157^0.50'$. 8. Digresiunea este elongaţia maximă a planetei, iar elongaţia este diferenţa între longitudinile plantei şi ale Soarelui. Digresiunea e totd'auna mai mică ca arc $\sin\frac{a_0}{a_1}$. Rezultat: aproxim. $44^0.30'$. Calculul se face prin explicarea staţiilor planetei atât aci cât şi în problema precedentă. 9. Parametrul $2p$ al orbitei este dat de relaţia: $p=\frac{b^2}{a}$. După legea treia a lui *Kepler* aria descrisă în unitatea de timp are expresiunea: $\frac{\pi a b}{T}$. Ţinând seamă de relaţia: $\frac{a^3}{T^2}=k$, se obţine imediat rezultatul. 10. Se aplică formulele: $tg\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tg\frac{v}{2}$, $r=a(1-e\cos u)$, $\xi=u-e\sin u$. Rezultat: $u=79^0.14'.8''$, $r=0{,}996868$, $\xi=78^0.17'.30''$. 11. Rezultat: $u=150^0.28'.24''$, $v=150^0.56'.36''$. 12. Se întrebuinţează formulele: $tg\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tg\frac{v}{2}$, $nt=u-e\sin u$, $n=\frac{2\pi}{T}$. Răspuns: 294.04 zile. 13. Rezultat: $r=1.5756$, $v=243^0.32'.40''$. 14. Fie α'_p şi α'_s ascensiunile drepte ale planetei şi ale Soarelui în momentul trecerii planetei la meridian. Putem scrie: $\alpha'_p=\alpha_p+\mu\frac{T_m}{24}$, $\alpha'_s=\alpha_s+\mu'\frac{T_m}{24}$. $T_m=\alpha'_p-\alpha'_s$. Eliminând α'_p şi α'_s obţinem formula din enunţ. 15. Se întrebuinţează formulele dela schimbarea de coordonate polare în spaţiu, şi se obţine: $D\cos\beta\cos\lambda=r\cos\Omega\cos\vartheta-R\cos L$, $D\cos\beta\sin\lambda=r\cos\Omega\sin\vartheta-R\sin L$, $D\sin\beta=r\sin\Omega$. $L=180^0+\lambda_s$. $D^2=r^2+R^2+2Rr\cos\Omega(\vartheta-\lambda_s)$. Eliminând pe D şi pe L între primele patru ecuaţii se obţine formulele din enunţ. 16. Se aplică formulele din problema precedentă şi se găseşte: $\lambda=174^0.38'.49''$, $\beta=2^0.14'.32''$. 17. Se utilizează formulele: $u=v-\Omega$, $tg(\vartheta-\Omega)=tg\,u\cos i$, $tg\,\Omega=$

$\sin(\mathfrak{L} - \Omega)\, tg\, i$. Rezultat: $\mathfrak{L} = 178^{\circ}.31'.20'',9$. $\mathfrak{B} = -5^{\circ}.59'.20'',1$.

18. Se întrebuinţează formula: $n\,t = 4\,tg\frac{\theta}{2} + \frac{4}{3}tg^3\frac{\theta}{2}$. Se găseşte: $tg\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{\theta}{2} = 0{,}6514$, $t = \frac{0.6514 \times 4}{n}$ Rezultat: $t = 151^{\text{zile}},46$. 19. Aplicăm formula: $V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, în care avem: $r = a\,(1 - e)$, $\mu = 0{,}0002959$. Rezultat: V=0,02485, $\frac{\text{dist. medii dela pământ la Soare}}{\text{zi}} = 146000\ \frac{\text{km}}{\text{oră}}$. Numărul μ este exprimat în următoarea măsură: $\frac{(\text{distanţe medii dela pământ la Soare})^3}{\text{zile}^2}$.

20. Dacă P este unghiul sub care se vede din centrul planetei distanţa dintre pământ şi soare S T, avem: $\varepsilon = 2\sin^2\frac{P}{2}$ cu condiţiunea $\sin P = \frac{S\,T}{S\,P} = \frac{a_t}{a_0}$ Pentru planeta Marte raportul $\frac{a_t}{a_0}$ este 1,5237. Rezultat: $\varepsilon \overset{=}{\sim} 0{,}25$.

IX

1. Se va ţine seame de nutaţii şi de retrogradarea liniei nodurilor. Răspuns: $i = 5^{\circ}.8'.43''3$. $\Omega = 259^{\circ}.7'.52'',8$. 2. Se găseşte imediat: $\cos\omega' = \cos\omega\cos i - \sin\omega\sin i\cos\Omega$. ω' variază în intervalul $(28^{\circ}.36' - 18^{\circ}18')$. 3. Se cere timpul S care se scurge între două faze de acelaş fel. Viteza unghiulară a pământului este: $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$, iar a lunei este: $\omega_l = \frac{2\pi}{T_l}$. In timpul S luna descrie deci arcul ω_l S iar pământul arcul ω_p S. Avem deci: $\omega_l S = 2\pi + \omega_p S$, formulă care ne conduce la rezultat. 4. Se va căuta timpul care se scurge între două treceri consecutive ale Soarelui prin acelaş nod. Răspuns: 646,62 zile. 5. Se va utiliza formulele dela problema No. 20 VIII. 6. Înălţimea adevărată a centrului lunei este: $h\,a = 35^{\circ}.20'.0'' + 0^{\circ}.46'.32''$ (adaus din paralaxă) $- 0^{\circ}.1'.26''$ (adaus din refracţie), $= 36^{\circ}.5'.06''$. Paralaxa de înălţime p a fost calculată cu formula: $p = P\sin\zeta$ iar refracţia cu formula: $\rho = 60'',6\,tg\,\zeta$. 7. La Bucureşti avem: $H = 44^{\circ}25'.38''$. Se găseşte: $P = 0{,}99837\ P'$. 8. Libraţia în latitudine este: $b = B - \beta$, unde: $tg\,B = tg\,i\sin(\Omega - \lambda)$. Se găseşte: $B = 1^{\circ}.8'.12$. Răspuns: $b = -2^{\circ}.49',32$. 9. Libraţia în longitudine e dată de formula: $l = \lambda + \mu + f\,b - \lambda_m$

unde: $\mu = \frac{1}{2} tg^2 \frac{i}{2} \sin 2(\Omega - \lambda)$. $f = -\sin i \cos(\Omega - \lambda)$. Se găseşte: $\mu = 0', 6$, $f = -0, 018$. Rezultat: $l = 7^\circ. 19'. 19'', 1$. **10.** Se stabilesc imediat relaţiunile: $x + x' = \zeta + \zeta' - (H + H')$, $\frac{tg \frac{x - x'}{2}}{tg \frac{x + x'}{2}} = \frac{tg \frac{\zeta - \zeta'}{2}}{tg \frac{\zeta + \zeta'}{2}}$. Paralaxa orizontală a lunii este dată de relaţia: $\sin p = \frac{\sin x}{\sin \zeta}$.

X

1. Aplic regula: Micşorez cu o unitate anul dat şi împart prin 4 rezultatul. Dacă restul e nul, anul dat *înainte* de Cristos a fost bisextil. **2.** Se numeşte ciclul solar o perioadă de 28 de ani după care aceleaşi zile ale săptămânii au aceiaşi dată (Calendar Iulian). Pentru anii *înainte* de Cristos, adaugăm numărul 18 la anul dat şi împart cu 28 rezultatul. Scăzând restul din împărţitor obţin ciclul solar: Pentru anii *după* Cristos, adaug numărul 9 la anul dat, împart cu 28. Restul ce se obţine este ciclul solar. **3.** Perioada Iuliană este o perioadă de 7980 de ani şi face legătură între diferitele sisteme de cronologie întrebuinţate înainte de Cristos. Adaug numărul constant 3266 la numărul dat, împart rezultatul cu 7980 şi scad restul din împărţitor. Rezultat: 7731. **4.** Determin ciclul solar al anului, scad unitatea, împart cu 4, adaug ciclu solar la cât, împart prin 7 şi scad restul din divizor. Rezultatul F. **5.** Răspuns: BA. **6.** Răspuns: Mercuri. **7.** Răspuns: 12 Octombrie. **8.** Aplic formula lui Gauss: $z = 23 + d + e$ Martie sau $z' = d + e - 9$ Aprilie. Dacă a, b, c sunt restul diviziuni anului cu 7, 9 şi 19, d este restul diviziunii lui $19\,c + 15$ prin 30 şi e restul diviziuni expresiunei: $2\,a + 4\,b + 6\,d + b$ prin 7. Răspuns: 1 Aprilie. **9.** Primăvara va începe la 19 Decembrie ora 5^{ore} $33^{min.}$ seara şi va dura 89^{zile} 16^{ore} $4^{min.}$ Vara va începe la 19 Martie ora 3^{ore} $48^{min.}$ dimineaţa şi va dura 89^{zile} 2^{ore} $2^{min.}$ Toamna va începe la 16 Iunie ora 5^{ore} $50^{min.}$ dimineaţa şi va dura 92^{zile} 22^{ore} $40^{min.}$ Iarna va începe la 17 Septembrie ora 4^{ore} $30^{min.}$ dimineaţa şi va dura 93^{zile} 13^{ore} $3^{min.}$ Calculul se face în modul următor: *Primăvara.* Formez numerile: $N - 2 = a = 11998$, $365\,a = b = 4.379.270$, $\frac{a+1}{4} = c = 2999,....$ (restul se neglige).

$b + c + 282,\ 90841 = d = 4382551,90841$. Iau restul diviziunei $\frac{d}{365,24222}$ şi scad acest rest din împărţitor. Rezultatul $354^{zile}\ 73159$ este *data anuală* a Primăverii. Transform fracţiunea în ore iar din Calendarul perpetuu deduc data corespunzătoare părţii întregi. (Vezi calendarul perpetuu la finele volumului). *Momentul trecerii soarelui la perigeu.* Acelaş calcul cu diferenţa că numărul d are expresiunea: $d = b + c + 28,\ 80074$. Data anuală: $87^{zile}\ 59994...$ *Vara, toamna iarna.* In anul 12000 soarele trece la perigeu înainte de începutul primăverii. Scad data anuală a perigeului din aceia a primăverii şi obţin $a = 267^{zile}\ 13165$. Caut în grade poziţia soare lui pe ecliptică: $267.\ 13165 \times \frac{360,7580}{366} = 261^{o},\ 3814$. Adaug la acest unghiu, respectiv unghiurile 90°, 180°, 270°, reduc rezultatele la prima circonferinţă şi am unghiurile: 351°, 3814; 81° 3814 şi 171° 3814 cărora le corespunde numerile: $356^{zile}\ 8007$; $80^{zile}\ 6433$ şi $173^{zile}\ 5878$. Adaug data perigeului şi obţin: $444^{zile}\ 4006.168^{zile}\ 2432$ şi $261^{zile}\ 1877$. Din datele mai mari ca 366 scad 365, 2422 şi obţin datele anuale ale începutului verii, toamnii şi iernii: $79^{zile}\ 1584.\ 168^{zile}\ 2432$ şi $261^{zile}\ 1877$. **10.** Iau numarul de sute ale anului *18*; împart acest număr cu *4* şi am *2* la rest; înmulţesc 2 prin 2 şi la rezultat adaug *1*. Am astfel $a = 5$. Partea neseculară a anului este *63*; împart *63* prin 4 şi am *15* la cât. Adun acest cât cu împărţitorul *63* şi obţin numărul *78*; împart *78* prin *7* şi am *1* la rest; scad restul 1 din divizionul 7 şi am $b = 6$. Adun a cu b şi împart rezultatul cu 7. Obţin restul 4 care dă litera. Răspuns: *D.* **11.** 11. Răspuns: Vineri. **12.** Aplicăm formula lui *Gauss*: Răspuns: 27 Martie. **13.** Răspuns: Primăvara începe la 17 Martie; Vara la 15 Iunie, Toamna la 12 Septembrie şi Iarna la 14 Decembrie. **14.** Răspuns: Luni. **15.** Răspuns: Sâmbătă. **16.** Răspuns: 15 Octombrie 1582. **17.** Anul evreesc care corespunde anului 1645 a. C. este 2116; Răspuns: Acordul e perfect. **18.** Răspuns: Vineri, 1 Moharrem. Anul 1 al erei musulmane. **19.** Răspuns: 27 August 1855. **20.** Răspuns: Mercuri 4 Noembrie 1818. **21.** Aplicăm regula lui *Gauss* şi luăm variaţia dela un an la altul. Se găseşte regula interesantă: Un paşte nu poate veni după altul la 52 sau 53 săptămâni, adică la numărul săptămânilor între care este coprins un an şi că el poate veni cel puţin la 50 săptămâni sau cel mult la 55. **22.** Răspuns: Nu-

mărul de aur: $n = 3$. Epactul: $e = 23$. Vârsta lunii: $v = 16$. 23. Vârsta lunii fiind $v = 16$ (vezi problema precedentă), timpul cât luminează luna în timpul nopţii este: $t = \frac{4}{5}(29 - v) = 10,2$ ore inegale. Cunoscând ora răsăritului soarelui 4^{ore}. 17^{min} dim., deducem durata nopţii 8^{ore}, 34^{min} şi găsim că o oră inegală are 0^{ore} 74 timp civil astronomic. Timpul care se scurge deci între răsăritul lunii şi al soarelui este: 7^{ore}. 18^{min} 34^{sec}. Ora răsăritului lunii se obţine cu formula: $t' = T^{ore} + 12^{ore} - t^{ore} = 8^{ore}$. 58^{min}. seara [1]). 24. Numărul de aur al anului este 3; epactul este 22. Adaug la epact 4 (numărul de luni Martie, Aprilie, Mai, Iunie) şi scad rezultatul din 30. Restul 4. Răspuns: 4 Iulie 1769. 25. Răspuns: $1876 + 28\,n$.

XI

1. Răspuns: $x = \rho'.\frac{\rho - \rho'}{d}$. 2. Răspuns: $L\,O = \frac{0,27 \times 23000}{108,27 - 0,27} = 57,5$. $f = \frac{1}{1.130.000}$. 3. Demonstraţia rezultă imediat din formulele ce se dau în cursurile teoretice de Cosmografie. 4. Idem. 5. Se va aplica formulele: $m = \Delta\alpha_l - \Delta\alpha_s$, $n = \Delta\delta_l + \Delta\delta_s$, $d = D + \frac{51}{50}(P_l + P_s - D')$ $cos\ \delta_l(\alpha_l - \alpha_s) = a\ sin\ A$, $\delta_l + \delta_s = a\ cos\ A$, $n = b\ cos\ B$, $m\ cos\ \delta_l = b\ sin\ B$, $sin\ (B - \gamma) = \frac{a\ sin\ (B - A)}{d}$, $T = \frac{d\ cos\ (B - \gamma)}{b} - \frac{a\ cos\ (B - A)}{b}$, şi se va găsi: $d = 3772''$, $B = -62^{0}.12'.40''$, $B - \gamma = 32^{0}.22'.21''$ şi $147^{0}.37'.39''$ $T_1 = -1^{ore}\ 59^{min}.\ 36^{sec}$. $T_2 = 0^{ore}\ 59^{min}.\ 42^{sec}$. Răspuns: Primul contact are loc la ora: $6^{ore}\ 25^{min}.\ 5^{sec}$. 6. Al doilea contact are loc la ora: $9^{ore}\ 24^{min}.\ 43^{sec}$. 6.

XII

1. Masa pământului e dată de ecuaţia: $m = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \times \gamma}{g} = \frac{4 \times 3.14 \times 6366^3 \times 5,5 \times 10^9}{3 \times 9,81} = 5784 \times 10^{20}\ \frac{Kgr.\ sec^2}{metru}$. 2. Forţa

1) In calcul s'a neglijat ecuaţia timpului.

de atracţiune are expresiunea : $F = f \frac{M\ m}{D^2} = \frac{\mu\ m}{D^2} =$

$\left[\frac{0.0002959 \times (149 \times 10^9)^3}{864 \times 10^4}\right] \frac{5784 \times 10^{20}}{149^2 \times 10^{18}} = 1337 \times 10^{17}$ kgr. în care

$f = \frac{m}{M}$, valoarea lui μ fiind definitivă la problema 19. VIII. 3. Atracţia lunii asupra unităţii de masă de apă de mare este : $F' = \frac{fm'}{(d-r^2)}$ iar asupra unităţii de masă din centrul pământului : $F'' = \frac{f\ m'}{d^2}$. Forţa care atrage unitatea de masă de pe apă este : $F = \frac{2\ f\ r\ m'}{d^3} = 4305 \times 10^{15}$ kgr. căci avem : $f = 274 \times 10^{-13} \frac{m^4}{\text{kgr. sec}^4}$, 4. Dacă V_1 şi V_2 sunt vitezele, m_1 şi m_2 masele planetelor şi F_1 şi F_2 forţele de atracţiune respective se găseşte : $V_1 = V_2 \sqrt[4]{\frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{m_2}{m_1}}$

5. Expresiunea forţei vii este : $\frac{1}{2} m V^2$ şi e proporţională cu expresiunea : $\frac{2}{r} - \frac{1}{a}$. Dacă ţinem seamă de formulele : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, şi dacă luăm variaţiunea între $\theta = o$ şi $\theta = \pi$ obţinem demonstraţia teoremei.

Erata. La problema 15 pag. 45 se va ceti *apune* în loc de *ajunge*.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

TABLA DE MATERII

Pag.

Prefață . . . . . V.

GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

Explicațiuni . . . . . VIII.

	Enunțuri	*Răspunsuri*
I. *Punctul*	Pag. 1	Pag. 21
Dreapta		
II. Epura liniei drepte; drepte particulare	„ 1	„ 21
III. Drepte concurente, paralele, perpendiculare	„ 3	„ 22
Planul.		
IV. Urmele planului; planuri perpendiculare	„ 5	„ 24
Dreaptă și plan		
V. Drepte și plane perpendiculare . .	„ 7	„ 26
VI. Drepte și plane paralele	„ 8	„ 26
VII. Dreapta și planul de profil	„ 8	„ 27
Cele trei metode		
VIII. Schimbarea de plane.	„ 9	„ 28
IX. Rotația	„ 11	„ 29
X. Rabaterea	„ 12	„ 31
Aplicațiuni		
XI. Intersecții	„ 14	„ 32
XII. Distanțe	„ 15	„ 34
XIII. Unghiuri	„ 17	„ 36
XIV. Cercul	„ 18	„ 38
XV. Secțiuni plane	„ 19	„ 39

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

COSMOGRAFIA

Notaţiuni . . . . . Pag. 42

	Enunţuri	*Răspunsuri*
I. Mişcarea diurnă şi cordonate cereşti	Pag. 43	Pag. 65
II. Transformarea coordonatelor . . .	„ 46	„ 67
III. Refracţia atmosferică	„ 46	„ 68
IV. Geografie şi coordonate geografice .	„ 47	„ 68
V. Hărţi şi navigaţie	„ 50	„ 71
VI. Rotaţia pământului	„ 52	„ 72
VII. Soarele	„ 52	„ 72
VIII. Legile lui Kepler. Mişcarea eliptică	„ 56	„ 74
IX. Luna	„ 58	„ 76
X. Calendare	„ 60	„ 77
XI. Eclipse	„ 62	„ 79
XII. Atracţia universală	„ 63	„ 80
Calendarul perpetuu Iulian şi Gregorian		pag. 81—84

Planşe

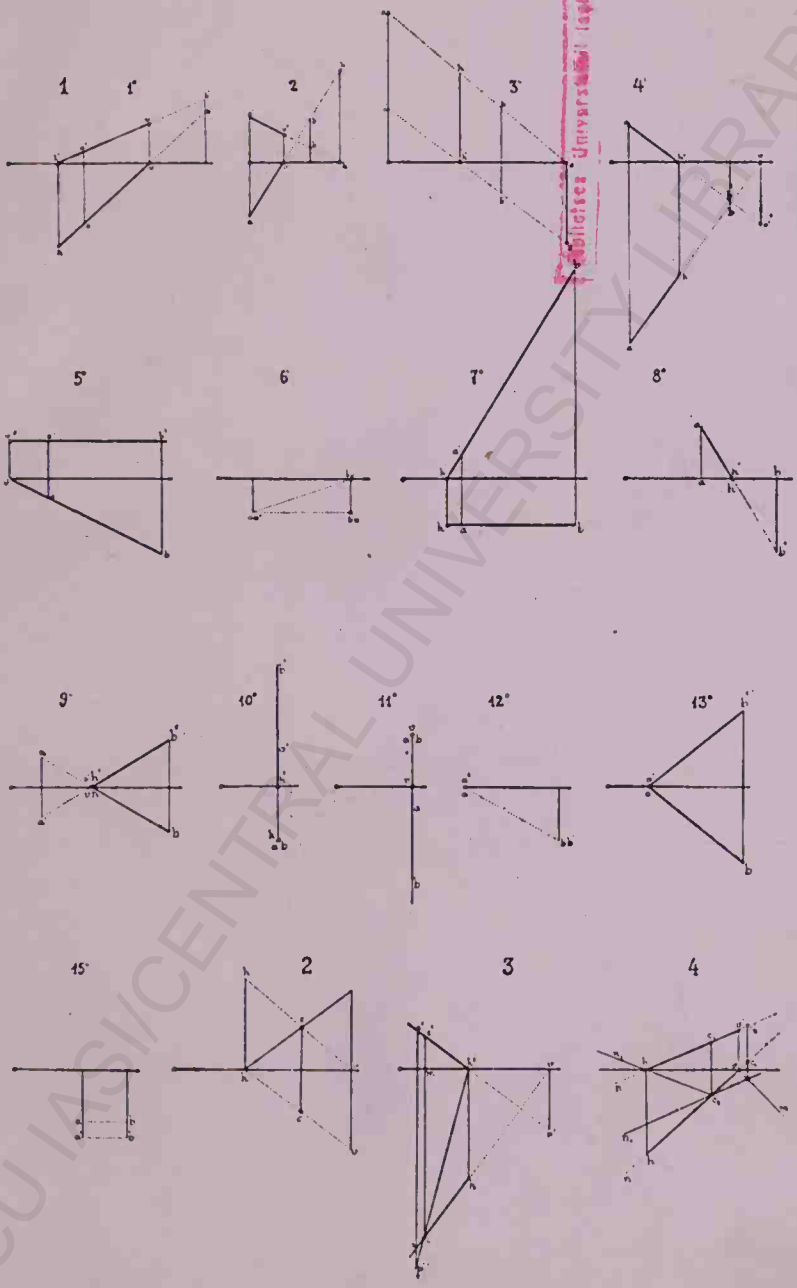
I. Dreapta
II. Drepte. Plan.
III. Dreaptă şi Plan.
IV. Metode
V. Aplicaţiuni
VI. Secţiuni plane

BIBLIOTECA UNIVERSITĂŢII -IAŞI-

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pl. I

DREAPTA



Biblioteca Universitară Iași
BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

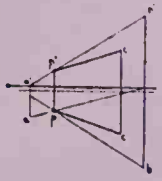
Pl II

DREPTE - PLAN

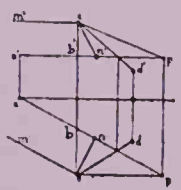
Biblioteca Universitară

III

3

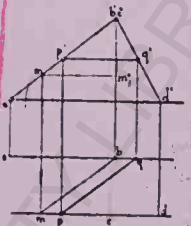


4

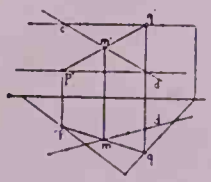


6

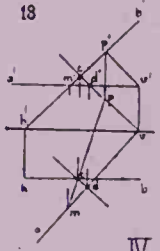
12



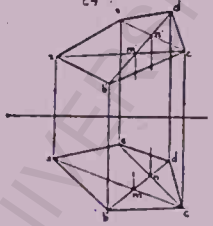
15



18



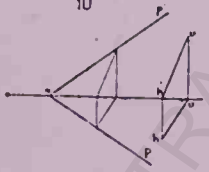
24



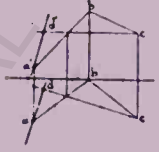
IV

3 r

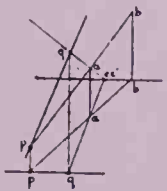
10



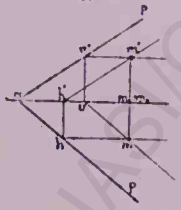
11



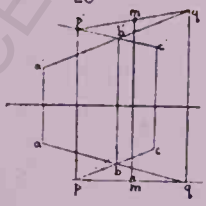
12



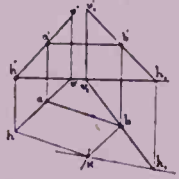
17



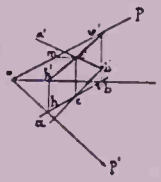
20



22



24

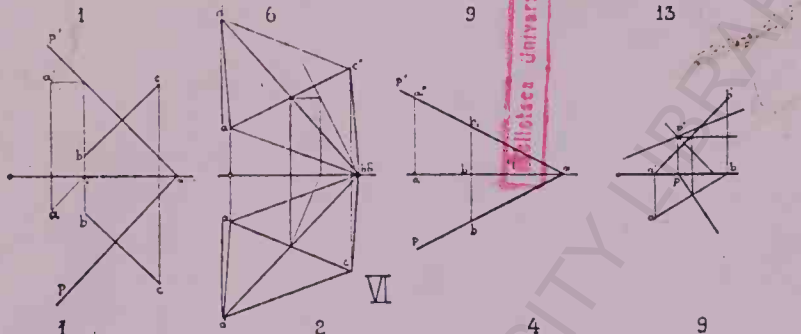


BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

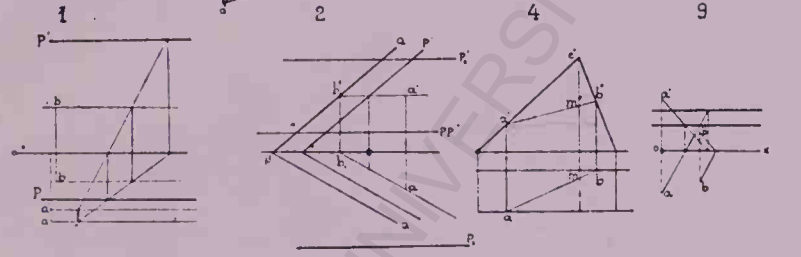
BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

DREAPTA SI PLAN

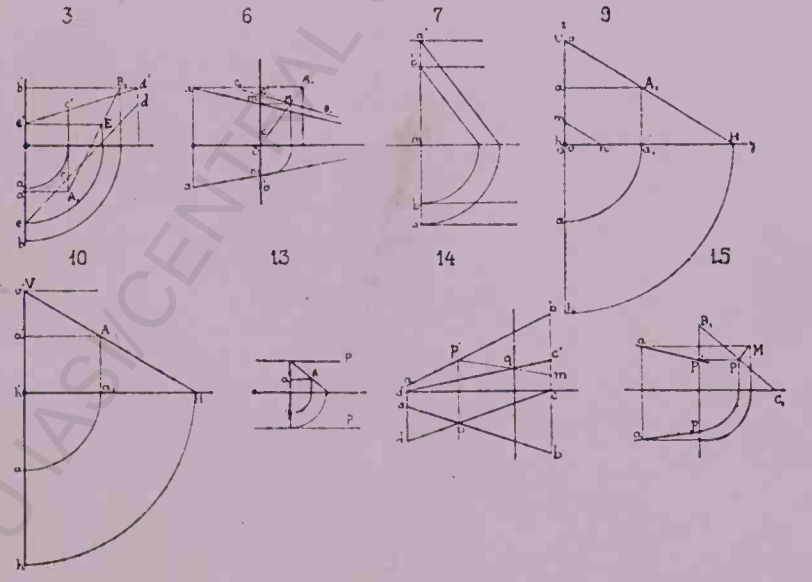
V



VI



VII

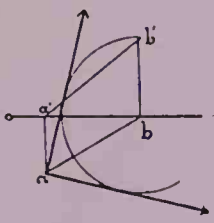


Biblioteca Universitară
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

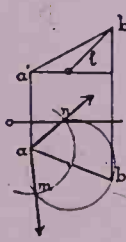
BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

VIII

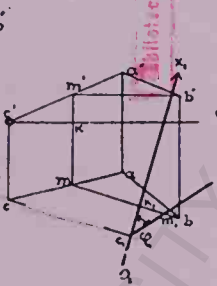
4



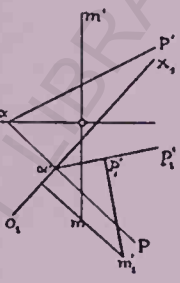
5



15

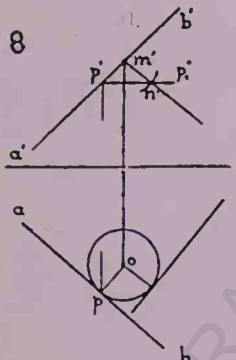


16

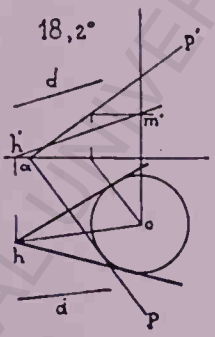


IX

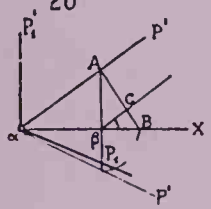
8



18,2°

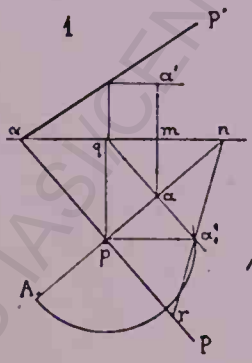


20

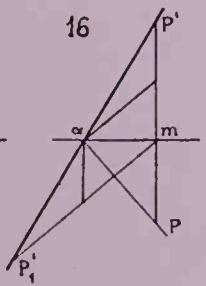


X

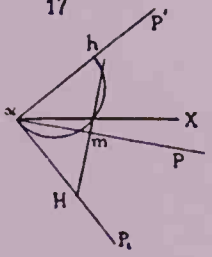
1



16



17



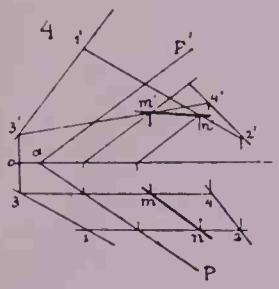
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

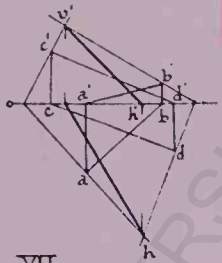
APLICATIUNI

XI

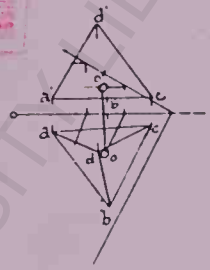
4



7

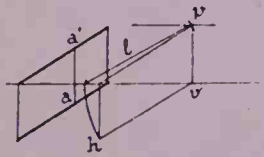


13

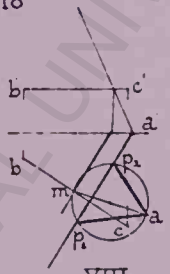


XII

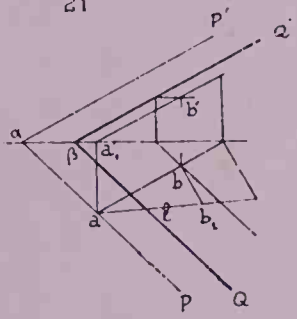
9



18

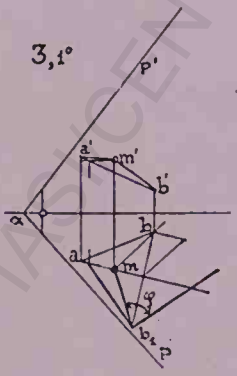


21

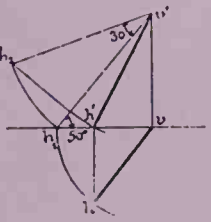


XIII

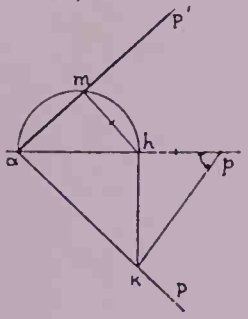
3,1°



6,2°



13,2°

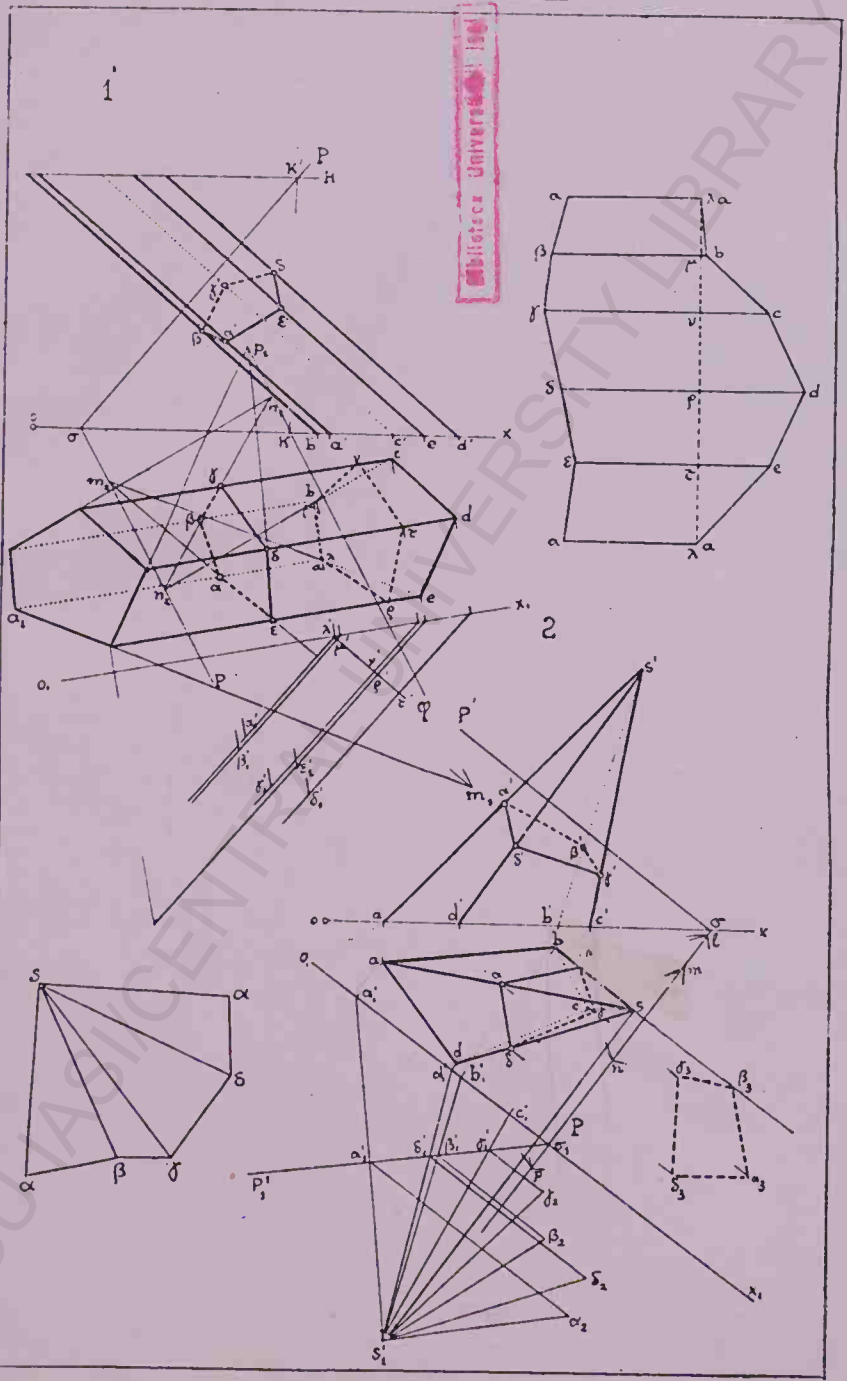


BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PI VI

SECTIUNI PLANE



Biblioteca Universitară
BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$(AB, CD) = -1.$

$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = -1.$

$-\frac{(ABC)}{(ABD)} = -1.$

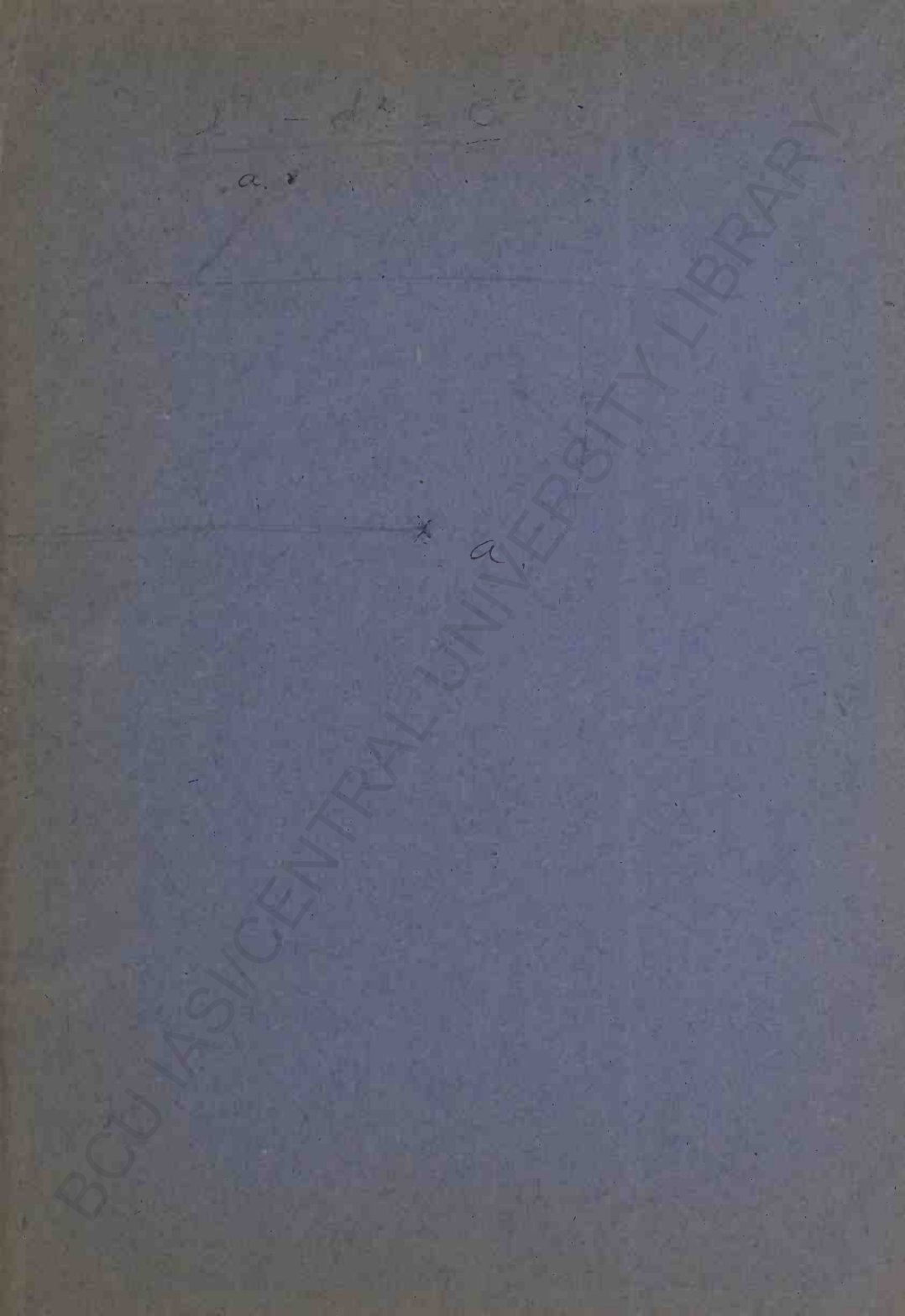
$\to \infty.$

$\to 1.$

$\frac{-AC}{+BC} = -1$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fi 209


a
BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY